

UNIVERSIDAD DE
SAN BUENAVENTURA
CALI

APLICACIÓN DEL
MÉTODO DE
GREEN
EN HETEROESTRUCTURAS
Y CRISTALES FOTÓNICOS

Gonzalo Becerra Orozco

2016

Aplicación del método de Green
en heteroestructuras y cristales fotónicos



**UNIVERSIDAD DE
SAN BUENAVENTURA
CALI**

Aplicación del método de Green en heteroestructuras y cristales fotónicos

Gonzalo Becerra Orozco

2016

Becerra Orozco, Gonzalo

Aplicación del método de Green en heteroestructuras y cristales fotónicos / Gonzalo Becerra Orozco – Cali : Editorial Bonaventuriana, 2016

98 p.

ISBN: 978-958-8785-91-2

1. Teorema de Green 2. Transformaciones de Fourier 3. Electromagnetismo 4. Campos magnéticos 5. Campos electromagnéticos 6. Ecuaciones de Maxwell 7. Transformaciones de Laplace 8. Fotónica 9. Ecuaciones diferenciales 10. Teoría cuántica 11. Espacios vectoriales I. Tít.

621.381 (D 23)

B389

© Universidad de San Buenaventura Cali



Editorial Bonaventuriana

Aplicación del método de Green en heteroestructuras y cristales fotónicos

© Autor: Gonzalo Becerra Orozco

Grupo de investigación: Laboratorio de Electrónica Aplicada (LEA)

Universidad de San Buenaventura
Colombia

© Editorial Bonaventuriana, 2016

Universidad de San Buenaventura

Dirección Editorial de Cali

Calle 117 No. 11 A 62

PBX: 57 (1) 520 02 99 - 57 (2) 318 22 00 – 488 22 22

e-mail: editorial.bonaventuriana@usb.edu.co

<http://www.editorialbonaventuriana.usb.edu.co>

Cali, Colombia, S. A.

El autor es responsable del contenido de la presente obra.

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro por cualquier medio, sin permiso escrito de la Editorial Bonaventuriana.

© Derechos reservados de la Universidad de San Buenaventura.

ISBN: 978-958-8785-91-2

Tiraje: 150 ejemplares

Cumplido el depósito legal (Ley 44 de 1993, Decreto 460 de 1995 y Decreto 358 de 2000)

Impreso en Colombia - Printed in Colombia.

2016

Contenido

Introducción	7
Unidad I - Propagador de Green	9
1. Concepto de propagador.....	12
Formalismo de la función de Green.....	14
Unidad II - Componentes del tensor de Green	19
3. Interacción de la radiación incidente sobre una superficie rugosa de un cristal semiinfinito	21
Unidad III - Película delgada	33
4. Tensor de Green para una película delgada con una capa doble de gas electrónico bidimensional (2D) y campo magnético aplicado.....	36
4.1 Descripción del sistema	36
4.2 Tensor magnetoconductividad	37
4.3 Componentes del tensor de Green.....	39
4.4 Condiciones de frontera para las componentes del tensor de Green	45
4.5 Solución al sistema homogéneo de ecuaciones	47
Unidad IV - Pozo cuántico	53
5. Formalismo de la función de Green para el estudio del papel de los magneto-plasmones 2D en absorción infrarroja en pozos cuánticos con campo externo y altas densidades electrónicas	57

5.1	Introducción	57
5.2	Descripción del sistema	58
5.3	Antecedentes.....	59
5.4	Modelo teórico	61
5.5	Programación de los modos característicos del sistema.....	64
5.6	Gráficas de las relaciones de dispersión y el poder espectral.....	70
6.	Influencia de los modos colectivos bidimensionales sobre la absorción infrarroja en un pozo cuántico de doble capa de <i>GaAs</i> con alta densidad electrónica	72
6.1	Introducción	73
6.2	Modelo teórico	74
6.3	Análisis de las gráficas	75
	Unidad V - Cristales fotónicos	77
7.	Características de las excitaciones acopladas en cristales fotónicos cerca de la brecha polaritónica	80
7.1	Introducción	80
7.2	Modelo teórico	81
7.3	Análisis de las gráficas de la ley de dispersión.....	82
8.	Modos colectivos en un cristal fotónico dieléctrico-superconductor	84
8.1	Introducción	85
8.2	Modelo y relaciones generales	85
8.3	Ley de dispersión y poder espectral	85
9.	Estados fotónicos en estructuras semiinfinitas dieléctrico-superconductoras	89
9.1	Introducción	89
9.2	Modelo teórico.....	90
9.3	Gráficas de la ley de dispersión.....	91
	Bibliografía	93
	Referencias unidad I	93
	Referencias unidad II	93
	Referencias unidad III.....	94
	Referencias unidad IV.....	94
	Referencias unidad V	96

Introducción

Con el objetivo de ilustrar al lector en el método de las funciones de Green en la descripción de la propagación de las ondas electromagnéticas y las propiedades ópticas de los nuevos materiales artificiales, este texto desarrolla problemas puntuales de la física de la materia condensada. Para ello busca afinar la metodología, modernizar el discurso, enriquecer el contenido y familiarizar al estudiante de posgrado en ciencias físicas en la aplicación de esta técnica teórica, para realizar el cálculo de las componentes del tensor de Green y su respectivo análisis físico. Se sabe que los polos de las funciones de Green determinan las relaciones de dispersión, y la parte imaginaria el poder espectral de las oscilaciones colectivas del sistema.

Este libro consta de cinco unidades. En la Unidad I se da el concepto de propagador y se define la función de Green, junto con algunas propiedades; además, desarrollar su formalismo el cual está asociado a la teoría de la respuesta lineal. En la Unidad II se construyen las componentes del tensor de Green al describir la interacción de la radiación incidente con la superficie de un cristal dieléctrico semiinfinito. De esta forma se obtiene la fórmula para la dispersión y absorción de la radiación electromagnética inducida por la rugosidad de la superficie de dicho dieléctrico para las ondas polarizadas s y p con un ángulo de incidencia cualquiera.

En la Unidad III se describe el papel del magneto-plasmón bidimensional en una absorción infrarroja con campo magnético transversal y altas densidades electrónicas en los pozos cuánticos; además, se estudian el poder espectral y las curvas de dispersión de los conjuntos de modos colectivos que aparecen en tal sistema cuando la frecuencia ciclotrónica toma valores en la región *reststrahlen* del espectro. Teniendo

en cuenta los efectos de retardo se determinan las resonancias entre la frecuencia ciclotrónica ω_c y los modos óptico transversal TO y óptico longitudinal LO .

En la Unidad IV se calculan las componentes del propagador fotónico en un pozo cuántico con alta densidad electrónica en un campo magnético transversal. Sobre esta base se determinan el poder espectral y las curvas de dispersión de los conjuntos de modos colectivos que aparecen en tal sistema cuando la frecuencia ciclotrónica ω_c toma valores en la región *reststrahlen* del espectro. Se discuten las resonancias entre la frecuencia ciclotrónica y los modos ópticos transversal TO y longitudinal LO . Se analiza el caso del pozo cuántico con una doble capa de electrones bidimensionales (2D).

En la Unidad V se estudian diferentes configuraciones físicas de cristales fotónicos unidimensionales con materiales iónicos y superconductores.

El enfoque aquí desglosado sobre las aplicaciones del propagador de Green puede tener ventajas en la formación de nuevos investigadores, quienes al recoger estas experiencias de seguro avanzaran hacia nuevos campos del conocimiento. Finalmente, agradezco los análisis, las sugerencias y las ilustraciones de los profesores de la Universidad del Valle, Juan Carlos Granada, Ph.D. y Jesús María Calero, Ph.D., los cuales permitieron configurar el presente texto. Es de destacar en ellos su profesionalismo, calidad humana, sencillez y profundo conocimiento de estos temas.

Unidad I

Propagador de Green

En esta unidad se discute el concepto de propagador y se desarrolla el formalismo de Green. Se define la función de Green independiente del tiempo y se presentan sus principales propiedades. Sobre esta base, en los próximos capítulos se discuten los métodos para el cálculo de sus componentes en aplicaciones puntuales de interés para la física de estados sólidos. La función de Green es muy útil, no solo en la física de la materia condensada, sino también en la mecánica cuántica y la teoría de campos.

En la teoría de campos surge un problema relacionado con la construcción de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales, que satisfacen las condiciones de frontera y se conocen las fuentes. En 1828, George Green (1793-1841) publicó un ensayo sobre la aplicación del análisis matemático de la teoría electromagnética. En este trabajo original de la física-matemática, Green buscó especificar el potencial eléctrico dentro de un vacío rodeado de conductores con determinados potenciales. En la notación actual se examinan las soluciones de la ecuación $\nabla^2 u = -f$ dentro de un volumen V , que satisface ciertas condiciones de frontera por la superficie S [1]. Green resuelve este problema al investigar la ecuación diferencial parcial $\nabla^2 G(\vec{r}|\vec{r}_o) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_o)$, (1.1), donde $\delta(\vec{r} - \vec{r}_o)$ es la función delta de Dirac.

Se sabe que la solución de (1.1) es $G = 1/R$, donde $R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$. Aunque Green reconocía la singularidad de la función G , procedió por un camino diferente y su trabajo se mantuvo relativamente desconocido hasta que fue publicado entre 1850 y 1854. Con su publicación, el centro de atención se desplazó a la escuela alemana de física-matemática. Posteriormente, Riemann llamó a G la “función de Green”. Luego, Carl Neumann, en 1877, consideró el concepto de las

funciones de Green en el estudio de las ecuaciones de Laplace, particularmente en el plano. Con el éxito de la función en la resolución de la ecuación de Laplace, otras ecuaciones comenzaron a plantearse con ayuda de las funciones de Green. En el caso de la ecuación del calor, Hobson deduce la función de Green en el espacio libre en tres dimensiones; y el francés Appell obtuvo una fórmula similar a la de Green en el caso unidimensional. Sin embargo, en el siglo XX le correspondió a Sommerfeld presentar la moderna teoría de las funciones de Green, que se aplican a la ecuación de calor. El desarrollo de las funciones de Green en la ecuación de onda fue liderado por Kirchhoff, quien las utilizó durante su estudio de la ecuación de onda tridimensional. La aplicación de las funciones de Green a las ecuaciones diferenciales ordinarias que involucran condiciones de frontera se inició con el trabajo de Burkhardt.

A continuación se presentan el concepto de propagador, algunas propiedades básicas y el formalismo de las funciones de Green.

1. Concepto de propagador

La función de Green es el núcleo de un operador integral y lineal \hat{F} . Un propagador es una función de Green, es decir, un tipo de solución de una ecuación diferencial. Considérese el operador diferencial y lineal \hat{S} que actúa sobre cierto espacio de funciones definidas sobre una variedad diferenciable X . Se entiende que el operador \hat{S} implica la variable independiente x . Una característica fundamental de la física-matemática es la solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. En el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias se puede expresar el problema de la forma

$$\hat{S}[v(x)] = f(x), \text{ donde } x \in \Omega \subset X, \quad (1.1)$$

donde Ω es el dominio de la función conocida $f(x)$, mientras que $v(x)$ es la solución que se busca. El método basado en la función de Green consiste en encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$\hat{S}[G(x, x')] = \delta(x - x'), \quad (1.2)$$

donde $G(x, x')$ es una función de dos variables, continua y diferenciable, en el sentido de la teoría de distribuciones y $\delta(x)$ es la función delta de Dirac, que está asociada a un punto arbitrario de excitación. Se quiere mostrar que la solución $v(x)$ está dada por una integral que involucra la función de Green $G(x, x')$. Si se puede encontrar la ecuación $G(x, x')$ que cumpla la ecuación (1.2), entonces la solución de (1.1) independientemente de la expresión de $f(x)$ se puede escribir de la forma

$$v(x) = \hat{F}[f(x)] = \int G(x, x') f(x') dx' \quad (1.3)$$

Se verifica que la función $v(x)$ en (1.3) resuelve la ecuación (1.1):

$$\hat{S}[v(x)] = \int \hat{S}[G(x, x')] f(x') dx' = \int \delta(x - x') f(x') dx' = f(x) \quad (1.4)$$

Se observa que la relación entre el operador integral \hat{F} dado por la función de Green y el operador diferencial \hat{S} son inversos, es decir,

$$\hat{S}^{-1} = \hat{F} \quad (1.5)$$

Se debe tener en cuenta que si el núcleo de \hat{S} no es trivial, entonces la función de Green no es única. Sin embargo, en la práctica, una combinación de la simetría del problema, las condiciones de frontera o criterios de continuidad llevan a una única función de Green.

Adicionalmente, la función de Green $G(x, x')$ no es una función matemática ordinaria, sino una función distribución. Además, cualquier operador diferencial \hat{S} no admite una función de Green, y en el caso más general, el operador \hat{F} es solo un inverso de \hat{S} por la derecha.

Desde un punto de vista cuántico, se asume que \hat{S} es un operador independiente del tiempo, lineal, hermítico y diferenciable, que posee un conjunto de funciones propias $\{\phi_n(x)\}$, tal que

$$\hat{S}\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x), \quad (1.6)$$

donde $\{\phi_n(x)\}$ satisface las mismas condiciones de frontera que $G(x, x')$. El subíndice n representa más de un valor correspondiente a la forma única de la *función propia* y el *valor propio* [2]. El conjunto $\{\phi_n\}$ se puede considerar ortonormal sin pérdida de generalidad, es decir,

$$\int_{\Omega} \phi_n^*(\vec{r}) \phi_m(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{nm} \quad (1.7)$$

La completitud del conjunto $\{\phi_n(\vec{r})\}$ significa que

$$\sum_n \phi_n(\vec{r}) \phi_n^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1.8)$$

donde n representa un conjunto de índices que pueden tomar cualquier valor discreto (por la parte discreta del espectro de \hat{S} , si existe) y/o valores continuos (para la parte continua del espectro de \hat{S} , si existe).

En general, el conocimiento de la función de Green $G(\vec{r}, \vec{r}'; z)$ permite obtener de inmediato la solución de la ecuación no homogénea.

$$\left[z - \hat{S}(\vec{r}) \right] u(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad (1.9)$$

sujeto a ciertas condiciones de frontera para \vec{r} o \vec{r}' , que yacen sobre la superficie S_0 del dominio Ω de las variables independientes \vec{r} y \vec{r}' . Aquí se asume que z es una variable compleja con $\lambda \equiv \text{Re}\{z\}$ y $\xi \equiv \text{Im}\{z\}$.

Al trabajar con la función de Green se facilita en gran medida la introducción de un espacio vectorial abstracto, una representación particular de las diversas funciones que nos ocupan. La forma más conveniente de lograr esto es mediante el uso de la notación bra y ket de Dirac. A continuación se presentan algunas propiedades:

$$\phi_n(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \phi_n \rangle; \quad (1.10)$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') \hat{S}(r) \equiv \langle \vec{r} | \hat{S} | \vec{r}' \rangle \quad (1.11)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; z) \equiv \langle \vec{r} | G(z) | \vec{r}' \rangle \quad (1.12)$$

$$\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.13)$$

$$\int dr |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| = 1, \quad (1.14)$$

donde $|\vec{r}\rangle$ es el vector propio del operador posición.

2. Formalismo de la función de Green

La gran mayoría de los cálculos en sistemas de muchos cuerpos están hechos dentro del formalismo de las funciones de Green. En la teoría cuántica de campos, la función de Green de una partícula es una de las cantidades más importantes al caracterizar las propiedades microscópicas de un sistema. Adaptando la definición de Economou [3], se tiene que la función retardada de Green para el campo fotónico es un 3-tensor y está dada en términos del potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ de la forma

$$D_{ik}^R(x_1, x_2) = -i \langle A_i(x_1) A_k(x_2) - A_k(x_1) A_i(x_2) \rangle \theta(t_1 - t_2); \quad (i = x, y, z), \quad (2.1)$$

donde

$$\theta(t_1 - t_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } t_1 > t_2 \\ 0, & \text{si } t_1 < t_2 \end{cases} \quad x \text{ denota un 4-vector: } x = (\vec{r}, t)$$

El símbolo $\langle \rangle$ denota el promedio sobre el estado fundamental del sistema. De la ecuación (2.1) se ve que el papel de ψ -operadores lo desempeñan los 4-potenciales

$\{A_\alpha\} = (\vec{A}, \varphi)$. En virtud de que los potenciales \vec{A} y φ están sujetos a la invariancia gauge, se ha elegido $\varphi(\vec{r}, t) = 0$. Es por esto que la definición (2.1) está dada solo en términos del potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t) \equiv A(\vec{x})$.

Debido a que las propiedades estadísticas de la radiación electromagnética en un medio absorbente se describen mediante la función de Green del fotón de dicho medio, se expresa esta función a través de la susceptibilidad generalizada. Se asume la permeabilidad magnética $\mu = 1$. De esta forma, el operador de interacción del campo con el medio [4].

$$\hat{V} = -\frac{1}{c} \int \vec{j} \cdot \vec{A} d^3x, \quad (2.2)$$

donde \vec{J} es el operador de corriente eléctrica, generado por las partículas del medio. En la teoría de respuesta lineal de Landau y Lifshitz [5], el operador de interacción tiene la forma

$$\hat{V} = -f(t) \cdot \hat{X} \quad (2.3)$$

En esta expresión, $f(t)$ es el agente externo que actúa sobre el sistema y \hat{X} la respuesta lineal del mismo a la perturbación aplicada. Comparando la expresión (2.2) y (2.3), se observa que las componentes de la corriente \vec{J} desempeñan el papel de $f(t)$, y el cociente \vec{A}/c representa la respuesta lineal del sistema \hat{X} .

A continuación se utiliza la relación existente entre la permitividad generalizada $\alpha(\omega)$ y la respuesta del sistema \hat{X} , dada a través de la fórmula de Kubo [5].

$$\alpha_{ij}(\omega; \vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty \exp(i\omega t) \left\langle \left[X_i(t, \vec{r}), X_j(t, \vec{r}') \right] \right\rangle dt \quad (2.4)$$

La fórmula de Kubo es una ecuación que expresa la respuesta lineal de una cantidad observable, debido a una perturbación dependiente del tiempo. Entre las numerosas aplicaciones de la teoría de respuesta lineal está, por ejemplo, la carga y la susceptibilidad del spin de un sistema de electrones con campos eléctricos o magnéticos externos. De igual manera, utilizando la misma fórmula se puede calcular el efecto de fuerzas mecánicas externas o la respuesta a vibraciones.

De acuerdo con la analogía establecida anteriormente, se puede escribir (2.4) de la forma

$$\alpha_{ij}(\omega; \vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{\hbar c^2} \int_0^\infty \exp(i\omega t) \left\langle \left[A_i(X), A_j/(X') \right] \right\rangle dt = -\frac{1}{\hbar c^2} \int_0^\infty \exp(i\omega t) D_{ij}^{(R)}(t; \vec{r}, \vec{r}') dt$$

Se observa que la susceptibilidad generalizada $\alpha_{ij}(\omega; \vec{r}, \vec{r}')$ se puede escribir como

$$\alpha_{ij}(\omega; \vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\hbar c^2} D_{ij}^{(R)}(\omega; \vec{r}, \vec{r}'), \quad (2.5)$$

donde

$$D_{ij}^{(R)}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') = \int_0^{\infty} \exp(i\omega t) D_{ij}^{(R)}(t; \vec{r}, \vec{r}') dt \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) juega un papel fundamental debido a que permite relacionar la permitividad generalizada con la función retardada de Green del sistema. En la teoría de la respuesta lineal se tiene que el valor medio de la magnitud X puede ser representado en la forma $\bar{X} = \hat{\alpha} \cdot f$; con ayuda de la analogía entre los operadores \hat{A} y \hat{J} , entre las magnitudes X y f , junto con la ecuación (2.3), se obtiene la siguiente expresión para el valor medio de \vec{A} :

$$\bar{A}_j(\omega, t) = -\frac{1}{\hbar c} \int D_{jk}^{(R)}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') j_k(\omega, \vec{r}') d^3 r' \quad (2.7)$$

Esta relación nos permite determinar la respuesta del sistema ante una perturbación externa. Es de notar que el conocimiento del tensor $D_{jk}^{(R)}$ es esencial, pues caracteriza intrínsecamente el sistema, independientemente de la perturbación externa.

Utilizando la invariancia gauge de la teoría, en la que el potencial escalar es cero, se deduce la ecuación que debe satisfacer el tensor retardado de Green del sistema. De acuerdo con las ecuaciones de Maxwell en forma monocromática

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c} \vec{A}; \quad \vec{H} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2.8)$$

el campo electromagnético creado por la corriente eléctrica \vec{J} es

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \frac{i\omega}{c} \vec{D}$$

Teniendo en cuenta (2.8), se observa que la ecuación anterior se convierte en

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

En forma indicial con componentes, la anterior expresión toma la forma

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \nabla^2 \delta_{ij} \right] A_j = -\frac{4\pi}{c} j_i \quad (2.9)$$

Asumiendo que el valor medio de \vec{A} es el potencial vectorial del campo electromagnético macroscópico del medio, podemos reemplazar la ecuación (2.7) en la ecuación (2.9) para obtener

$$-\frac{1}{\hbar} \int \left[\frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \nabla^2 \delta_{ij} \right] D_{ik}^{(R)}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') j_k(\omega, \vec{r}') d^3 r' = -4\pi j_i(\omega, \vec{r}) \quad (2.10)$$

Si se reemplaza $j_i(\omega, \vec{r}) = \delta_{ik} \int j_k(\omega, \vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'$ en la ecuación (2.10), se obtiene la ecuación diferencial que satisface la función de Green del fotón en un medio con permitividad dieléctrica ϵ , de la forma

$$\left[\frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \delta_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \nabla^2 \delta_{ij} \right] D_{jk}^{(R)}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') = 4\pi \hbar \delta_{ik} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.11)$$

La expresión (2.11) es el punto de partida para calcular las componentes del tensor de Green del sistema físico a describir en cada caso particular.

En la siguiente unidad se ilustran algunas situaciones concretas de aplicación del formalismo descrito, con el cálculo de las componentes del tensor de Green. Se explica también la interacción de la radiación incidente sobre una superficie rugosa de un cristal dieléctrico semiinfinito e isotrópico.

Unidad II
Componentes del
tensor de Green

Con el objeto de presentar una discusión teórica sobre los efectos de la rugosidad superficial en la interacción de la radiación electromagnética incidente con la superficie de un cristal dieléctrico semiinfinito, se construyen las componentes del tensor de Green (Figura 3.1). En el artículo de Maradudin y Mills [6] se obtiene la fórmula para la dispersión y absorción de la radiación electromagnética inducida debido a la rugosidad de la superficie de dicho dieléctrico para las ondas polarizadas s y p con un ángulo de incidencia cualquiera.

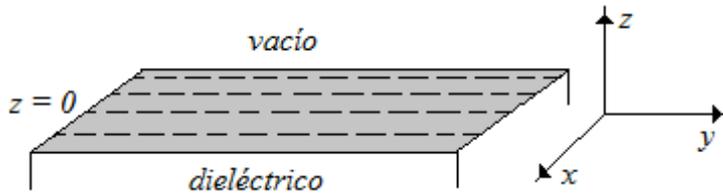


Figura 3.1

Cristal dieléctrico semiinfinito e isotrópico en el plano xy . Por encima de esta superficie hay vacío, mientras que el medio ocupa el espacio debajo de este y está caracterizado por una constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$ (compleja) dependiente de la frecuencia.

3. Interacción de la radiación incidente sobre una superficie rugosa de un cristal semiinfinito

En este ítem se describe la deducción de las componentes del tensor de Green, que es la solución de la ecuación

$$\sum_{\mu} \left(\epsilon_o(z; \omega) \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{\lambda\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\lambda} \partial x_{\mu}} + \delta_{\lambda\mu} \nabla^2 \right) D_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) = 4\pi \delta_{\lambda\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.1)$$

donde

$$\varepsilon_0(z; \omega) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ \varepsilon(\omega), & z < 0' \end{cases} \quad (3.2)$$

junto con las condiciones de frontera, las cuales se especifican más adelante.

Inicialmente se aplica el análisis de Fourier a $D_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega)$ y $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ de acuerdo con

$$D_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) = \int \frac{d^2 k_{//}}{(2\pi)^2} \exp(i \vec{k}_{//} \cdot (\vec{x}_{//} - \vec{x}'_{//})) d_{\mu\nu}(\vec{k}_{//}, \omega | z z') \quad (3.3)$$

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(z - z') \int \frac{d^2 k_{//}}{(2\pi)^2} \exp(i \vec{k}_{//} \cdot (\vec{x}_{//} - \vec{x}'_{//})), \quad (3.4)$$

donde $\vec{k}_{//}$ y $\vec{x}_{//}$ son vectores bidimensionales dados por $(k_x, k_y, 0)$ y $(x, y, 0)$ respectivamente. La descomposición (3.3) refleja el hecho de que el sistema para el que la función de Green $D_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega)$ busca conservar la invariancia traslacional infinitesimal en las direcciones x y y , incluso si esta se ha perdido en la dirección z . De la sustitución de las ecuaciones (3.3) y (3.4) en la ecuación (3.1) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales para los coeficientes de Fourier $d_{\mu\nu}(\vec{k}_{//}, \omega | z z')$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 + \frac{d^2}{dz^2} & k_x k_y & -i k_x \frac{d}{dz} \\ k_x k_y & \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 + \frac{d^2}{dz^2} & -i k_y \frac{d}{dz} \\ -i k_x \frac{d}{dz} & -i k_y \frac{d}{dz} & \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} \end{pmatrix} = 4\pi \delta(z - z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Considerando la isotropía en el plano xy del sistema descrito, dieléctrico semiinfinito, se multiplica la expresión (3.5) por las matrices $\vec{S}(\vec{k}_{//})$ y $\vec{S}^{-1}(\vec{k}_{//})$, antes y después, respectivamente, formando un sándwich, donde

$$\vec{S}(\vec{k}_{//}) = \frac{1}{k_{//}} \begin{pmatrix} k_x & k_y & 0 \\ -k_y & k_x & 0 \\ 0 & 0 & k_{//} \end{pmatrix}, \quad \vec{S}^{-1}(\vec{k}_{//}) = \frac{1}{k_{//}} \begin{pmatrix} k_x & -k_y & 0 \\ k_y & k_x & 0 \\ 0 & 0 & k_{//} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

La matriz $\vec{S}(\vec{k}_{//})$ tiene como función hacer rotar el vector de onda $(k_x, k_y, 0)$ hasta transformarlo en $(k_{//}, 0, 0)$. De esta forma se simplifica la expresión (3.5) en la ecuación

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{d^2}{dz^2} & 0 & -ik_{//} \frac{d}{dz} \\ 0 & \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 + \frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ -ik_{//} \frac{d}{dz} & 0 & \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} = 4\pi\delta(z-z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

para los coeficientes de Fourier $g_{\mu\nu}(\bar{k}_{//}, \omega|z z')$, los cuales están relacionados con los coeficientes $d_{\mu\nu}(\bar{k}_{//}, \omega|z z')$ por

$$d_{\mu\nu}(\bar{k}_{//}, \omega|z z') = \sum_{\mu' \nu'} g_{\mu'\nu'}(\bar{k}_{//}, \omega|z z') S_{\mu'\mu}(\bar{k}_{//}) S_{\nu'\nu}(\bar{k}_{//}) \quad (3.8)$$

A continuación se obtienen solamente los coeficientes $g_{\mu\nu}(\bar{k}_{//}, \omega|z z')$. De la ecuación (3.7) se observa que las funciones g_{yx} y g_{yz} satisfacen las ecuaciones homogéneas

$$\left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) g_{yx} = 0 \quad (3.9a)$$

$$\left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) g_{yz} = 0 \quad (3.9b)$$

Las funciones g_{xy} y g_{zy} satisfacen un par de ecuaciones homogéneas acopladas

$$\left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) g_{xy} - ik_{//} \frac{d}{dz} g_{zy} = 0 \quad (3.10a)$$

$$\left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 \right) g_{zy} - ik_{//} \frac{d}{dz} g_{xy} = 0 \quad (3.10b)$$

Por lo tanto, estas cuatro funciones se igualan a cero, es decir,

$$g_{zy} = g_{xy} = g_{yx} = g_{yz} = 0$$

Así, queda por resolver el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) g_{yy} = 4\pi\delta(z-z') \quad (3.11)$$

$$\left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) g_{xx} - ik_{//} \frac{d}{dz} g_{zx} = 4\pi\delta(z-z') \quad (3.12a)$$

$$\left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 \right) \mathcal{G}_{zx} - i k_{//} \frac{d}{dz} \mathcal{G}_{xx} = 0 \quad (3.12b)$$

$$\left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \mathcal{G}_{xz} - i k_{//} \frac{d}{dz} \mathcal{G}_{zz} = 0 \quad (3.13a)$$

$$\left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 \right) \mathcal{G}_{zz} - i k_{//} \frac{d}{dz} \mathcal{G}_{xz} = 4\pi \delta(z - z') \quad (3.13b)$$

De las ecuaciones (3.11) a (3.13) se pueden considerar las componentes primarias del tensor de Green a \mathcal{G}_{xx} , \mathcal{G}_{yy} y \mathcal{G}_{xz} que deben resolverse, mientras que las restantes componentes \mathcal{G}_{zx} y \mathcal{G}_{zz} se pueden obtener a partir de \mathcal{G}_{xx} y \mathcal{G}_{xz} , respectivamente.

Se consideran las condiciones de frontera que complementan las ecuaciones diferenciales (3.11) a (3.13). Ellas son de dos tipos: (i) condiciones de frontera en $z = \pm\infty$, y (ii) condiciones de frontera en la interfase $z = 0$. Para el primero se asumen ya sean ondas salientes al infinito u ondas que decaen exponencialmente en el infinito, dependiendo de los valores de $k_{//}$ y ω . Para obtener las condiciones de frontera en la interfase $z = 0$ se procede de la siguiente manera.

Se parte de las ecuaciones de Maxwell, escritas en el sistema de unidades c.g.s. de Gauss, en presencia de una corriente externa $\vec{j}^{ext}(\vec{x}, t)$ y utilizando una calibración en la cual el potencial escalar $\varphi(\vec{x}, t)$ se anula, se obtiene

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{ext} + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.14a)$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \varphi = 0 \quad (3.14b)$$

$$\vec{B} = \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad (3.14c)$$

tal que el potencial vectorial $A_\alpha(\vec{x}, \omega)$ se relaciona con la corriente externa $\vec{j}^{ext}(\vec{x}, t)$ por

$$A_\alpha(\vec{x}, \omega) = -\frac{1}{c} \sum_{\beta} \int d^3 x' D_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) \vec{j}_\beta^{ext}(\vec{x}', \omega), \quad (3.15)$$

donde $D_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega)$ es la misma función de Green que aparece en la ecuación (3.1). De las ecuaciones (3.14) se deduce que los campos eléctrico y magnético inducidos por la corriente externa están dados por

$$(\vec{x}, \omega) = -\frac{i\omega}{c^2} \sum_{\beta} \int d^3 x' D_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) \vec{j}_\beta^{ext}(\vec{x}', \omega) \quad (3.16)$$

$$\vec{j}_\alpha(\vec{x}, \omega) = -\frac{1}{c} \sum_{\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int d^3 x' D_{\gamma\delta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) \vec{j}_\delta^{ext}(\vec{x}', \omega) \quad (3.17)$$

Las condiciones de frontera sobre $D_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega)$ resultan de la continuidad de las componentes tangenciales de \vec{E} y \vec{H} , y las componentes normales de \vec{D} y \vec{B} a través del plano $z = 0$. Puesto que $\vec{j}^{ext}(\vec{x}, t)$ es arbitrario, se observa que las siguientes cantidades deben ser continuas a través del plano $z = 0$, para $\beta = x, y, z$:

$$D_{x\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega), D_{y\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega), \sum_{\gamma} \varepsilon_{z\gamma}(\vec{x}; \omega) D_{\gamma\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} D_{z\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) - \frac{\partial}{\partial z} D_{y\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} D_{x\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) - \frac{\partial}{\partial x} D_{z\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) \quad (3.19b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} D_{y\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) - \frac{\partial}{\partial y} D_{x\beta}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega) \quad (3.19c)$$

Al escribir la tercera de estas cantidades en la ecuación (3.18) se ha supuesto, para mayor generalidad, un tensor dieléctrico dependiente de la posición arbitraria $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{x}; \omega)$ que, sin embargo, aún posee una discontinuidad a través del plano $z = 0$. Las condiciones de frontera que se derivan de la continuidad de las seis cantidades dadas por las ecuaciones (3.18) y (3.19) no son del todo independientes.

Con la ayuda de la ecuación (3.3), se encuentra que estas condiciones de frontera se convierten en las siguientes condiciones para el coeficiente de Fourier $d_{\mu\nu}(\vec{k}_{||}, \omega | z z')$. Las cantidades (3.20a)-(3.20d):

$$d_{x\beta}(\vec{k}_{||}, \omega | z z'), d_{y\beta}(\vec{k}_{||}, \omega | z z') \varepsilon_0(z; \omega) d_{z\beta}(\vec{k}_{||}, \omega | z z') \quad (3.20a)$$

$$i k_y d_{z\beta}(\vec{k}_{||}, \omega | z z') - \frac{d}{dz} d_{y\beta}(\vec{k}_{||}, \omega | z z') \quad (3.20b)$$

$$-i k_x d_{z\beta}(\vec{k}_{||}, \omega | z z') + \frac{d}{dz} d_{x\beta}(\vec{k}_{||}, \omega | z z') \quad (3.20c)$$

$$i k_x d_{y\beta}(\vec{k}_{||}, \omega | z z') - i k_y d_{x\beta}(\vec{k}_{||}, \omega | z z') \quad (3.20d)$$

deben ser continuas a través del plano $z = 0$. Se tiene en cuenta que las dos primeras condiciones implican la última, la cual por ende se descarta en lo que sigue.

Al escribir estas condiciones, también se debe asumir la dependencia escalar z de la constante dieléctrica, que es la situación apropiada para el problema en cuestión.

Para obtener las condiciones de frontera sobre las funciones $g_{\mu\nu}(\vec{k}_{//} \omega | z z')$, para las cuales se busca la solución, al combinar las condiciones (3.20) con el inverso de la ecuación (3.8),

$$g_{\mu\nu}(\vec{k}_{//} \omega | z z') = \sum_{\mu' \nu'} S_{\mu\mu'}(\vec{k}_{//}) S_{\nu\nu'}(\vec{k}_{//}) d_{\mu'\nu'}(\vec{k}_{//} \omega | z z') \quad (3.21)$$

y las ecuaciones diferenciales (3.5). Por ejemplo, se tiene que

$$g_{xx} = \frac{1}{k_{//}^2} (k_x^2 d_{xx} + k_x k_y d_{xy} + k_x k_y d_{yx} + k_y^2 d_{yy}),$$

dado que cada término del lado derecho es continuo a través del plano $z = 0$, se obtiene la condición de frontera

$$g_{xx}|_{0^-} = g_{xx}|_{0^+} \quad (3.22a)$$

Adicionalmente, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} g_{xx} &= \frac{k_x}{k_{//}^2} \left(k_x \frac{d}{dz} d_{xx} + k_y \frac{d}{dz} d_{yx} \right) + \frac{k_y}{k_{//}^2} \left(k_x \frac{d}{dz} d_{xy} + k_y \frac{d}{dz} d_{yy} \right) = \\ &= \frac{i k_x}{k_{//}^2} \left(-i k_x \frac{d}{dz} d_{xx} - i k_y \frac{d}{dz} d_{yx} \right) + \frac{i k_y}{k_{//}^2} \left(-i k_x \frac{d}{dz} d_{xy} - i k_y \frac{d}{dz} d_{yy} \right) = \\ &= \frac{i}{k_{//}^2} \left(k_{//}^2 - \epsilon_0(z; \omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) (k_x d_{zx} + k_y d_{zy}), \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la expresión (2.5), al pasar de la segunda a la tercera ecuación.

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $\epsilon_0(z; \omega) [k_{//}^2 - \epsilon_0(z; \omega) (\omega^2 / c^2)]^{-1}$, se obtiene

$$\frac{\epsilon_0(z; \omega)}{k_{//}^2 - \epsilon_0(z; \omega) (\omega^2 / c^2)} \frac{d}{dz} g_{xx} = \frac{i}{k_{//}^2} [k_x \epsilon_0(z; \omega) d_{zx} + k_y \epsilon_0(z; \omega) d_{zy}]$$

De acuerdo con (2.20a), el lado derecho de esta ecuación es continuo a través del plano $z = 0$. Por lo tanto, se obtiene la segunda condición de frontera

$$\frac{\epsilon_0}{k_{//}^2 - \epsilon_0 \omega^2 / c^2} \frac{d}{dz} g_{xx}|_{0^-} = \frac{\epsilon_0}{k_{//}^2 - \epsilon_0 \omega^2 / c^2} \frac{d}{dz} g_{xx}|_{0^+} \quad (3.22b)$$

De la misma manera se obtienen las restantes condiciones de frontera

$$g_{yy}|_{0^-} = g_{yy}|_{0^+} \quad (3.22c)$$

$$\frac{d}{dz} g_{yy}|_{0^-} = \frac{d}{dz} g_{yy}|_{0^+} \quad (3.22d)$$

$$g_{xz}|_{0^-} = g_{xz}|_{0^+} \quad (3.22e)$$

$$\frac{d}{dz} g_{xz}|_{0^-} = \frac{d}{dz} g_{xz}|_{0^+} \quad (3.22f)$$

Las ecuaciones (3.22) constituyen las condiciones de frontera en el plano $z = 0$ de las componentes primarias del tensor de Green g_{xx} , g_{yy} y g_{xz} .

En la solución de las ecuaciones diferenciales (3.11) a (3.13), los siguientes dos resultados son útiles para la obtención de las integrales en particular:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \alpha^2 \right) \frac{e^{i\alpha|z-z'|}}{2i\alpha} = \delta(z-z') \quad (3.23a)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \alpha^2 \right) \frac{1}{2} e^{i\alpha|z-z'|} \operatorname{sgn}(z-z') = \frac{d}{dz} \delta(z-z') \quad (3.23b)$$

Se ilustra la determinación de $g_{\mu\nu}(\vec{k}_{//} \omega | z z')$ mediante la elaboración de $g_{xz}(\vec{k}_{//} \omega | z z')$. Se asume primero que Al combinar las ecuaciones (3.13a) y (3.13b), y recordando la ecuación (3.2), se encuentra que las ecuaciones que satisfacen esta ecuación son

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) g_{xz} = 0, \quad z > 0 \quad (3.24a)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_1^2 \right) g_{xz} = i k_{//} \frac{4\pi c^2}{\varepsilon(\omega) \omega^2} \frac{d}{dz} \delta(z-z'), \quad z < 0 \quad (3.24b)$$

donde se han introducido las funciones

$$k = \begin{cases} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 \right)^{1/2}, & \frac{\omega^2}{c^2} > k_{//}^2 \\ i \left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2}, & \frac{\omega^2}{c^2} < k_{//}^2 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$k_1 = - \left[\varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 \right]^{1/2} \quad (3.26)$$

La elección del signo en la ecuación (3.26), junto con el hecho de que $Im\varepsilon(\omega) > 0$, asegura que $Imk_1 < 0$.

La solución de las ecuaciones (3.24) se puede escribir de la forma

$$g_{xz} = \begin{cases} A \exp(ikz), & z > 0 \\ ik_{//} \frac{2\pi c^2}{\varepsilon(\omega)\omega^2} \exp[-ik_1|z-z'|] \operatorname{sgn}(z-z') + B \exp[ik_1z], & z < 0 \end{cases}$$

la cual, de acuerdo con las ecuaciones (3.25) y (3.26), satisface las condiciones de frontera en el infinito. Ahora se aplican las condiciones de frontera (3.22e) y (3.25f) para obtener las siguientes ecuaciones para los coeficientes A y B,

$$A = B + 2\pi i \frac{k_{//} c^2}{\varepsilon(\omega)\omega^2} \exp(ik_1z')$$

$$\frac{k_1 A}{k \varepsilon(\omega)} = B - 2\pi i \frac{k_{//} c^2}{\varepsilon(\omega)\omega^2} \exp(ik_1z'),$$

de donde se deduce que

$$g_{xz}(k_{//}\omega|zz') = \begin{cases} -\frac{4\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \frac{k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(ikz + ik_1z'), & z > 0, z' < 0 \\ -\frac{2\pi i k_{//} c^2}{\varepsilon(\omega)\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(ik_1(z+z')) - \operatorname{sgn}(z-z') \exp[-ik_1|z-z'|] \right], & z < 0, z' < 0 \end{cases}$$

Cuando $z' > 0$, las ecuaciones que cumplen $g_{xz}(\vec{k}_{//}\omega|zz')$ se convierten en

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) g_{xz} = \frac{4\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \frac{d}{dz} \delta(z-z'), \quad z > 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_1^2 \right) g_{xz} = 0, \quad z < 0$$

Las soluciones que satisfacen las condiciones de frontera son

$$g_{xz}(k_{//}\omega|zz') = \begin{cases} -\frac{4\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \frac{k_1}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(ik_1z + ikz'), & z < 0, z' > 0 \\ -\frac{2\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(ik(z+z')) - \operatorname{sgn}(z-z') \exp[-ik|z-z'|] \right], & z > 0, z' > 0 \end{cases}$$

Las restantes funciones de Green se pueden obtener de la misma forma. Los resultados de estos cálculos se resumen a continuación.

$$\begin{aligned}
 g_{yy}(k_{//} \omega | z z') &= \frac{4\pi i}{k_1 - k} \exp(i k z + i k_1 z'), \quad z > 0, \quad z' > 0 \\
 &= \frac{2\pi i}{k_1} \left[\frac{k_1 + k}{k_1 - k} \exp[i k_1 (z + z') + \exp(-i k_1 |z - z'|)] \right], \quad z < 0, \quad z' < 0 \\
 &= \frac{2\pi i}{k} \left[\frac{k_1 + k}{k_1 - k} \exp[i k (z + z') - \exp(i k |z - z'|)] \right], \quad z > 0, \quad z' > 0 \\
 &= \frac{4\pi i}{k_1 - k} \exp[i k_1 z + i k z'], \quad z < 0, \quad z' > 0 \\
 g_{xz}(k_{//} \omega | z z') &= -\frac{4\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \frac{k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(i k z + i k_1 z'), \quad z > 0, \quad z' < 0 \\
 &= \frac{2\pi i k_{//} c^2}{\varepsilon(\omega)\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp[i k_1 (z + z') - \operatorname{sgn}(z - z') \exp(-i k_1 |z - z'|)] \right], \quad z < 0, \quad z' < 0 \\
 &= \frac{2\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp[i k (z + z') - \operatorname{sgn}(z - z') \exp(-i k |z - z'|)] \right], \quad z > 0, \quad z' > 0 \\
 &= -\frac{4\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \frac{k_1}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(i k_1 z + i k z'), \quad z < 0, \quad z' > 0 \\
 g_{zz}(k_{//} \omega | z z') &= \frac{4\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \frac{1}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(i k z + i k_1 z'), \quad z > 0, \quad z' < 0 \\
 &= \frac{2\pi i k_{//}^2 c^2}{k_1 \varepsilon(\omega)\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp[i k_1 (z + z') + \exp(-i k_1 |z - z'|)] \right] + \frac{4\pi c^2}{\varepsilon(\omega)\omega^2} \delta(z - z'), \quad z < 0, \quad z' < 0 \\
 &= \frac{2\pi i k_{//}^2 c^2}{k\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp i k_1 (z + z') - \exp(i k |z - z'|) \right] + \frac{4\pi c^2}{\omega^2} \delta(z - z'), \quad z > 0, \quad z' > 0 \\
 &= \frac{4\pi i k_{//}^2 c^2}{\omega^2} \frac{1}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(i k_1 z + i k z'), \quad z < 0, \quad z' > 0 \\
 g_{xx}(k_{//} \omega | z z') &= -\frac{4\pi i c^2}{\omega^2} \frac{k k_1}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(i k z + i k_1 z'), \quad z > 0, \quad z' < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2\pi i k_1 c^2}{\varepsilon(\omega)\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp[i k_1 (z + z') - \exp(-i k_1 |z - z'|)] \right], \quad z < 0, \quad z' < 0 \\
 &= -\frac{2\pi i k c^2}{\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp i k (z + z') + \exp(i k |z - z'|) \right], \quad z > 0, \quad z' > 0 \\
 &= -\frac{4\pi i k c^2}{\omega^2} \frac{k_1}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(i k_1 z + i k z'), \quad z < 0, \quad z' > 0 \\
 g_{z_x}(k_{//}, \omega | z z') &= \frac{4\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \frac{k_1}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(i k z + i k_1 z'), \quad z > 0, \quad z' < 0 \\
 &= \frac{2\pi i k_{//} c^2}{\varepsilon(\omega)\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp[i k_1 (z + z')] + \operatorname{sgn}(z - z') \exp(-i k_1 |z - z'|) \right], \quad z < 0, \quad z' < 0 \\
 &= \frac{2\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \left[\frac{k_1 + \varepsilon(\omega)k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp i k (z + z') + \operatorname{sgn}(z - z') \exp(i k |z - z'|) \right], \quad z > 0, \quad z' > 0 \\
 &= \frac{4\pi i k_{//} c^2}{\omega^2} \frac{k}{k_1 - \varepsilon(\omega)k} \exp(i k_1 z + i k z'), \quad z < 0, \quad z' > 0
 \end{aligned}$$

Adicional a la aplicación descrita en el presente ítem, las componentes del tensor de Green $D_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega)$, cuyos coeficientes de Fourier $g_{\mu\nu}(\vec{k}_{//}, \omega | z z')$ se han calculado, también surgen en la evaluación de las funciones de Green termodinámicas, junto con las funciones de correlación de los campos electromagnéticos en un medio formado de capas, para el cual se han desarrollado los mismos cálculos en el trabajo de Abrikosov, Gorkov y Dzyaloshinski [2].

Por ejemplo, se considera la función de Green retardada

$$D_{\alpha\beta}^R(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t_1 - t_2) = -i \Theta(t_1 - t_2) \langle [A_\alpha(\vec{x}_1, t_1), A_\beta(\vec{x}_2, t_2)] \rangle \tag{3.27}$$

donde $\vec{A}(\vec{x}, t)$ es ahora el operador potencial vectorial en la representación de Heisenberg, y los corchetes angulares denotan un promedio con respecto al conjunto canónico descrito por el hamiltoniano del campo electromagnético. La transformada de Fourier de esta función de Green se puede escribir de la forma

$$D_{\alpha\beta}^R(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t_1 - t_2) \exp[i\omega(t_1 - t_2)] D_{\alpha\beta}^R(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t_1 - t_2)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dx [1 - \exp(-\beta \hbar x)] \frac{\rho_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; x)}{x\omega - i\delta}, \quad (3.28)$$

donde la densidad espectral $\rho_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; x)$ está dada por

$$\rho_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \omega) = \sum_{mn} \frac{m \exp(-\beta E)}{Z} \langle m | A_{\alpha}(\bar{x}_1) | n \rangle \langle n | A_{\beta}(\bar{x}_2) | m \rangle \delta \left[x - \frac{1}{\hbar} (E_n - E_m) \right] \quad (3.29)$$

En términos de las funciones propias $|n\rangle$ y los valores propios E_n del hamiltoniano del sistema, Z es la función partición. Se puede expresar la transformada de Fourier de varias funciones de correlación convenientes en términos de $\rho_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; x)$. Por ejemplo, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t_1 - t_2) \exp[i\omega(t_1 - t_2)] \langle A_{\alpha}(\bar{x}_1, t_1) A_{\beta}(\bar{x}_2, t_2) \rangle = 2\pi \rho_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \omega) \quad (3.30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t_1 - t_2) \exp[i\omega(t_1 - t_2)] \langle E_{\alpha}(\bar{x}_1, t_1) E_{\beta}(\bar{x}_2, t_2) \rangle = 2\pi \frac{\omega^2}{c^2} \rho_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \omega) \quad (3.31)$$

La densidad espectral $\rho_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \omega)$ se puede obtener de una forma estándar [3]. Se introduce una función de variable compleja z por

$$D_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; z) = - \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \exp(-\beta \hbar x)] \frac{\rho_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; x)}{x - z} dx \quad (3.32)$$

la cual coincide con $D_{\alpha\beta}^R(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \omega)$ para $Im z > 0$. Para $Im z < 0$, $\hat{D}_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; z)$ coincide con la transformada de Fourier de la función de Green avanzada. Entonces se tiene que

$$\rho_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \omega) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega)} \left[\hat{D}_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \omega + i0) - \hat{D}_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \omega - i0) \right] \quad (3.33)$$

La importancia de las funciones de Green $D_{\alpha\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \omega)$, estudiadas en este ejemplo para tales cálculos, radica en el hecho de que Dzyaloshinski y Pitayevski [4] han establecido la relación

$$D_{\alpha\beta}^R(\bar{x}, \bar{x}'; \omega) = \hbar D_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{x}'; \omega) \quad (3.34)$$

a partir de la cual $\hat{D}_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{x}'; z)$ se puede obtener, y por lo tanto, la densidad espectral $\rho_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{x}'; \omega)$ y otras funciones útiles de correlación.

Unidad III

Película delgada

A partir de la década de los setenta, en el siglo XX, se están investigando muy minuciosamente las películas delgadas, tanto teórica como experimentalmente. El progreso tecnológico en métodos como, por ejemplo, el crecimiento epitaxial por haces moleculares MBE y la deposición química de vapor CVD, en la obtención de heteroestructuras con capas de diferentes materiales, ha permitido desarrollar la investigación de diversos efectos asociados en especial con las propiedades ópticas, magnéticas y optoelectrónicas de estos materiales.

Bajo la acción de una perturbación externa es posible excitar los modos de oscilación electrónicos y iónicos de la película delgada. En un sistema en el cual la permitividad dieléctrica presenta dispersión temporal, es decir, cuando depende explícitamente de la frecuencia de las excitaciones, es posible el acoplamiento entre los modos fonónicos y electromagnéticos. Esto lleva a la aparición de una clase particular de excitones llamados polaritones, los cuales se caracterizan por la propagación con frecuencias características en la región óptica del espectro. En sistemas con una o varias superficies es posible la aparición de modos localizados, polaritones superficiales, cuyos campos electromagnéticos decrecen en forma exponencial con la distancia a la respectiva superficie.

En esta unidad, con la ayuda del formalismo de las funciones de Green, se describe el papel del *magneto-plasmón bidimensional* en una absorción infrarroja con campo magnético transversal y altas densidades electrónicas en los pozos cuánticos. La geometría del sistema descrito se ilustra en la Figura 4.1. Se estudian el poder espectral y las curvas de dispersión de los conjuntos de modos colectivos que aparecen en tal sistema, cuando la frecuencia ciclotrónica toma valores en la *región*

reststrahlen del espectro. Teniendo en cuenta los efectos de retardo, se determinan las resonancias entre la frecuencia ciclotrónica ω_c y los modos óptico transversal TO y óptico longitudinal LO.

4. Tensor de Green para una película delgada con una capa doble de gas electrónico bidimensional (2D) y campo magnético aplicado

4.1 Descripción del sistema

Se considera una película de espesor d que ocupa el espacio $0 < z < d$. La función dieléctrica del sistema es de la forma

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1(\omega), & z < 0 \wedge z > d \\ \varepsilon_2(\omega), & 0 < z < d \end{cases} \quad (4.1)$$

La película se caracteriza por tener una permitividad dieléctrica $\varepsilon_2(\omega)$, la cual depende de la frecuencia ω de las excitaciones colectivas de la siguiente forma

$$\varepsilon_2(\omega) = \varepsilon_\infty \frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega^2 - \omega_T^2} \quad (4.2)$$

donde ε_∞ y ε_0 son las permitividades dieléctricas a altas y bajas frecuencias, respectivamente. Así mismo, ω_T es la frecuencia característica de los fonones ópticos transversales, y ω_L de los fonones ópticos longitudinales. Se considera que ambas superficies de la película delgada contactan con medios semiinfinitos caracterizados por la misma permitividad dieléctrica $\varepsilon_1(\omega)$, cuya dependencia con la frecuencia cambia para diferentes materiales.

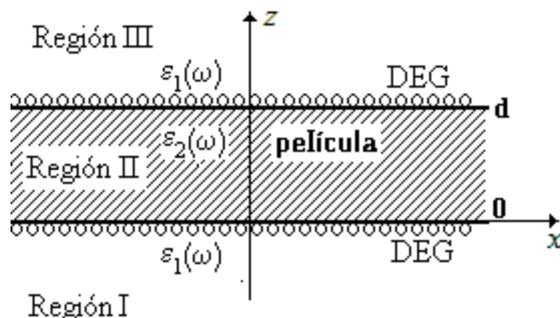


Figura 4.1
Película delgada.

4.2 Tensor magnetoconductividad

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento para un electrón en el plano xy (pozo de potencial) bajo la acción de un campo eléctrico \vec{E} y un campo magnético B_z , perpendicular a la película (eje z) en el sistema c.g.s. de Gauss

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.3)$$

donde la velocidad del electrón se puede escribir de la forma armónica

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Por lo tanto, la ecuación (4.3) queda de la forma

$$-i\omega m \vec{v} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

Como el campo magnético está aplicado a lo largo del eje z , el producto vectorial de la velocidad y el campo es igual a

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \hat{x} B v_y - \hat{y} B v_x$$

y la ecuación (4.3) se transforma en las ecuaciones escalares a lo largo del eje x y el eje y

$$\begin{cases} -i\omega v_x - \omega_c v_y = \frac{e}{m} E_x \\ \omega_c v_x - i\omega v_y = \frac{e}{m} E_y \end{cases},$$

donde $\omega_c = \frac{eB}{cm}$ es la frecuencia ciclotrónica del electrón.

Para hallar las componentes de la velocidad v_x y v_y se definen los determinantes

$$\Delta_o = \begin{vmatrix} -i\omega & -\omega_c \\ \omega_c & -i\omega \end{vmatrix} = \omega_c^2 - \omega^2$$

$$\Delta_x = \frac{e}{m} \begin{vmatrix} E_x & -\omega_c \\ E_y & -i\omega \end{vmatrix} = -i \frac{e\omega}{m} E_x + \frac{e\omega_c}{m} E_y$$

$$\Delta_y = \frac{e}{m} \begin{vmatrix} -i\omega & E_x \\ \omega_c & E_y \end{vmatrix} = \frac{e\omega_c}{m} E_x - i \frac{e\omega}{m} E_y$$

Se obtienen las expresiones para las componentes de la velocidad

$$v_x = \frac{\Delta_x}{\Delta_o} = -i \frac{e\omega}{m(\omega_c^2 - \omega^2)} E_x + \frac{e\omega_c}{m(\omega_c^2 - \omega^2)} E_y$$

$$v_y = \frac{\Delta_y}{\Delta_o} = -\frac{e\omega_c}{m(\omega_c^2 - \omega^2)} E_x - i \frac{e\omega}{m(\omega_c^2 - \omega^2)} E_y$$

Sabiendo que el vector densidad de corriente está determinado por la relación

$$\vec{J} = e n_s \vec{v} ,$$

donde n_s es la concentración de portadores de conducción eléctrica. De esta forma, las componentes J_x y J_y del vector densidad de corriente son

$$J_x = i \frac{e^2 n_s \omega}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} E_x - \frac{e^2 n_s \omega_c}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} E_y$$

$$J_y = \frac{e^2 n_s \omega_c}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} E_x + i \frac{e^2 n_s \omega}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} E_y \quad (4.4)$$

La relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico es

$$J_k = \sigma_{kl} E_l ,$$

donde σ_{kl} es el tensor conductividad eléctrica. De esta forma, J_x y J_y se pueden escribir de la forma

$$J_x = \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y$$

$$J_y = \sigma_{yx} E_x + \sigma_{yy} E_y$$

Comparando con la expresión (4.4), las componentes del tensor conductividad son iguales a

$$\sigma_{xx} = i \frac{e^2 n_s \omega}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} = \sigma_{yy}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2 n_s \omega_c}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} = -\sigma_{yx} \quad (4.5)$$

4.3 Componentes del tensor de Green

Las ecuaciones de Maxwell en presencia de una fuente externa $\vec{J}^{ext}(\vec{r}, t)$ y de corrientes bidimensionales $\vec{J}^{2D}(\vec{r}_{//}, t)$ en $z = 0$ y $z = d$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \left[\vec{J}^{ext} + \vec{J}^{2D} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.9)$$

La corriente bidimensional tiene la forma

$$J_i^{2D}(\vec{r}, t) = \sigma_{ij} \left[E_j(\vec{r}_{//}, 0, t) \delta(z) + E_j(\vec{r}_{//}, d, t) \delta(z - d) \right], \quad (4.10)$$

donde σ_{ij} es el tensor de magnetoconductividad (4.5) y $\vec{r}_{//} \equiv (x, y)$. En el sistema c.g.s. de Gauss se tienen las ecuaciones constitutivas

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon(z) \vec{E} \\ \vec{B} = \vec{H} \end{cases},$$

donde la permitividad dieléctrica $\varepsilon(z)$ está dada por las ecuaciones (4.1) y (4.2).

Utilizando las identidades $\nabla \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$ y $\nabla \times \nabla \varphi = 0$, para cualquier escalar φ y cualquier vector \vec{F} , de la ecuación de Maxwell (4.9) se obtiene que

$$\vec{B} = \vec{H} = \nabla \times \vec{A} \quad (4.11)$$

Reemplazando esta expresión en (4.7) se encuentra que

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

De acuerdo con la calibración de Gauss $\varphi = 0$, el campo eléctrico queda de la forma

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.12)$$

Por lo tanto, la ecuación de Maxwell (4.6) se convierte en

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{ext} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{2D} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Aplicando la identidad $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ la i -ésima componente de la anterior ecuación queda de la forma

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i \partial x_j} - \nabla^2 A_i + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} J_i^{ext} + \frac{4\pi}{c} J_i^{2D}$$

Como $A_i = \delta_{ij} A_j$, al factorizar A_j y tener en cuenta las ecuaciones (2.10) y (2.12), esta última expresión se convierte en

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \nabla^2 \delta_{ij} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta_{ij} \right) A_j(\vec{r}_{//}, t) + \frac{4\pi\sigma_{ij}}{c^2} \left[\frac{\partial A_j(\vec{r}_{//}, 0, t)}{\partial t} \delta(z) + \frac{\partial A_j(\vec{r}_{//}, d, t)}{\partial t} \delta(z-d) \right] \quad (4.13)$$

$$= \frac{4\pi}{c} J_i^{ext}$$

La transformada de Fourier para el potencial vectorial magnético, al pasar del espacio real $\vec{r}_{//}$ al espacio de las ondas ω , es

$$A_j(\vec{r}_{//}, t) = \frac{1}{2\pi} \int A_j(\vec{r}_{//}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

La expresión (4.13) toma la forma

$$\left[\varepsilon(z) \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \nabla^2 \delta_{ij} \right] A_j(\vec{r}_{//}, \omega) + i \frac{4\pi\omega\sigma_{ij}}{c^2} \left[A_j(\vec{r}_{//}, 0, \omega) \delta(z) + A_j(\vec{r}_{//}, d, \omega) \delta(z-d) \right] \quad (4.14)$$

$$= -\frac{4\pi}{c} J_i^{ext}(\vec{r}, \omega)$$

Con el objeto de simplificar la notación, el operador representado en el primer corchete de la ecuación (4.14) se puede escribir de la forma

$$(op)_{ij} = \varepsilon(z) \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \nabla^2 \delta_{ij}$$

De esta forma, la ecuación (4.14) se convierte en

$$(op)_{ij} D_{jk}(\vec{r}_{//}, \vec{r}'_{//}, \omega) + i \frac{4\pi\omega\delta_{ij}}{c^2} \left[A_j(\vec{r}_{//}, 0, \omega) \delta(z) + A_j(\vec{r}_{//}, d, \omega) \delta(z-d) \right] = -\frac{4\pi}{c} J_i^{ext}(\vec{r}, \omega) \quad (4.15)$$

De acuerdo con Poulter y Zeman [1], en el apéndice del artículo de Maradudin y Mills [2], y siguiendo la metodología de los trabajos de Reina-Estupiñán y Granada [3] y Reina-Estupiñán [4], se transforma el potencial vectorial magnético de acuerdo con la expresión

$$A_j(\vec{r}_{\parallel}, \omega) = -\frac{1}{c} \int d^3 \vec{r}'_{\parallel} D_{jk}(\vec{r}_{\parallel}, \vec{r}'_{\parallel}, \omega) J_k^{ext}(\vec{r}', \omega) \quad (4.16a)$$

Recordando que $\vec{r} = (\vec{r}_{\parallel}, z)$, de la ecuación (4.16) se desprende que

$$A_j(\vec{r}_{\parallel}, 0, \omega) = -\frac{1}{c} \int d^3 \vec{r}' D_{jk}(\vec{r}_{\parallel}, \vec{r}'_{\parallel}, 0, z', \omega) J_k^{ext}(\vec{r}', \omega) \quad (4.16b)$$

$$A_j(\vec{r}_{\parallel}, d, \omega) = -\frac{1}{c} \int d^3 \vec{r}' D_{jk}(\vec{r}_{\parallel}, \vec{r}'_{\parallel}, d, z', \omega) J_k^{ext}(\vec{r}', \omega) \quad (4.16c)$$

Teniendo en cuenta la homogeneidad de la película en el plano xy y reemplazando las ecuaciones (4.16a), (4.16b) y (4.16b) en la expresión (4.15) se obtiene

$$\int \left\{ (op)_{ij} D_{jk}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) + i \frac{4\pi\omega\sigma_{ij}}{c^2} \left[D_{jk}(\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel}, 0, z', \omega) \delta(z) + D_{jk}(\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel}, d, z', \omega) \delta(z-d) \right] \right\} \\ \times \left[J_k^{ext}(\vec{r}', \omega) d^3 \vec{r}' \right] = 4\pi J_i^{ext}(\vec{r}, \omega)$$

Como la densidad de corriente externa es de la forma

$$J_i^{ext}(\vec{r}, \omega) = \delta_{ik} \int J_k^{ext}(\vec{r}', \omega) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

Por lo tanto, se obtiene una ecuación vectorial para el tensor $D_{jk}(\vec{r}, \vec{r}', \omega)$

$$(op)_{ij} D_{jk}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) + i \frac{4\pi\omega\sigma_{ij}}{c^2} \left[D_{jk}(\vec{r}_{\parallel}, \vec{r}'_{\parallel}, 0, \omega) \delta(z) + D_{jk}(\vec{r}_{\parallel}, \vec{r}'_{\parallel}, d, \omega) \delta(z-d) \right] \\ = 4\pi \delta_{ik} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.17)$$

En ausencia de gas electrónico bidimensional (2DEG), al dopar la película, por ejemplo con fósforo, la ecuación (4.17) coincide con la expresión (3.1) de Maradudin y Mills [2].

Al definir el tensor $D_{jk}(\vec{r}, \vec{r}', \omega)$ de la forma

$$D_{jk}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel})} d_{jk}(\vec{k}, \omega, z, z'),$$

las ecuaciones (3.5) se generalizan en nuestro caso de la siguiente manera:

$$(\tilde{o}\tilde{p})_{ij} d_{jk}(\vec{k}, \omega, z, z') + i \frac{4\pi\omega\sigma_{ij}}{c^2} \left[d_{jk}(\vec{k}, \omega, 0, z')\delta(z) + d_{jk}(\vec{k}, \omega, d, z')\delta(z-d) \right] \\ = 4\pi\delta_{ik}\delta(z-z'),$$

donde $(\tilde{o}\tilde{p})_{ij}$ es la matriz diferencial de Maradudin y Mills (3.5). En forma compacta, se tiene

$$(\hat{o}\hat{p})\hat{d}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \hat{\sigma} \left[\hat{d}(0, z')\delta(z) + \hat{d}(d, z')\delta(z-d) \right] = 4\pi\delta(z-z') \quad (4.18)$$

Para explotar la isotropía del sistema planteado, se puede multiplicar la ecuación (4.18) a la izquierda por $\hat{S}(\vec{k}_{||})$ y a la derecha por $\hat{S}^{-1}(\vec{k}_{||})$; se obtiene

$$\left[\hat{S}(\vec{k}_{||})(\hat{o}\hat{p})\hat{S}^{-1}(\vec{k}_{||}) \right] \left[\hat{S}(\vec{k}_{||})\hat{d}(z, z')\hat{S}^{-1}(\vec{k}_{||}) \right] + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \hat{\sigma} \left[\hat{S}(\vec{k}_{||})\hat{d}(0, z')\hat{S}^{-1}(\vec{k}_{||})\delta(z) + \right. \\ \left. \hat{S}(\vec{k}_{||})\hat{d}(d, z')\hat{S}^{-1}(\vec{k}_{||})\delta(z-d) \right] = 4\pi\delta(z-z') \quad (4.19)$$

Definiendo $\hat{S}(\vec{k}_{||})\hat{d}(z, z')\hat{S}^{-1}(\vec{k}_{||}) = g(z, z')$, se obtiene la siguiente generalización de la ecuación (3.7):

$$\begin{pmatrix} \epsilon_o \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{d^2}{dz^2} & 0 & -ik_{||} \frac{d}{dz} \\ 0 & \epsilon_o \frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2 + \frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ -ik_{||} \frac{d}{dz} & 0 & \epsilon_o \frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2 \end{pmatrix} \times \\ \begin{pmatrix} g_{xx}(z, z') & g_{xy}(z, z') & g_{xz}(z, z') \\ g_{yx}(z, z') & g_{yy}(z, z') & g_{yz}(z, z') \\ g_{zx}(z, z') & g_{zy}(z, z') & g_{zz}(z, z') \end{pmatrix} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_{xx}(0, z') & g_{xy}(0, z') & g_{xz}(0, z') \\ g_{yx}(0, z') & g_{yy}(0, z') & g_{yz}(0, z') \\ g_{zx}(0, z') & g_{zy}(0, z') & g_{zz}(0, z') \end{pmatrix} \delta(z) + \\ i \frac{4\pi\omega}{c^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_{xx}(d, z') & g_{xy}(d, z') & g_{xz}(d, z') \\ g_{yx}(d, z') & g_{yy}(d, z') & g_{yz}(d, z') \\ g_{zx}(d, z') & g_{zy}(d, z') & g_{zz}(d, z') \end{pmatrix} \delta(z-d) = 4\pi\delta(z-z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneas para las componentes $g_{xx}, g_{xy}, g_{xz}, g_{yx}, g_{yy}, g_{yz}, g_{zx}, g_{zy}, g_{zz}$.

$$\left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) g_{xx}(z, z') - i k_{\parallel} \frac{d}{dz} g_{zx}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{xx} [g_{xx}(0, z')\delta(z) + g_{xx}(d, z')\delta(z-d)] + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{xy} [g_{yx}(0, z')\delta(z) + g_{yx}(d, z')\delta(z-d)] = 4\pi\delta(z-z') \quad (4.20)$$

$$\left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) g_{xy}(z, z') - i k_{\parallel} \frac{d}{dz} g_{zy}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{xx} [g_{xy}(0, z')\delta(z) + g_{xy}(d, z')\delta(z-d)] + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{xy} [g_{yy}(0, z')\delta(z) + g_{yy}(d, z')\delta(z-d)] = 0 \quad (4.21)$$

$$\left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) g_{xz}(z, z') - i k_{\parallel} \frac{d}{dz} g_{zx}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{xx} [g_{xz}(0, z')\delta(z) + g_{xz}(d, z')\delta(z-d)] + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{xy} [g_{yz}(0, z')\delta(z) + g_{yz}(d, z')\delta(z-d)] = 0 \quad (4.22)$$

$$\left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) g_{yx}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} [g_{xx}(0, z')\delta(z) + g_{xx}(d, z')\delta(z-d)] + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} [g_{yx}(0, z')\delta(z) + g_{yx}(d, z')\delta(z-d)] = 0 \quad (4.23)$$

$$\left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) g_{yy}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} [g_{xy}(0, z')\delta(z) + g_{xy}(d, z')\delta(z-d)] + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} [g_{yy}(0, z')\delta(z) + g_{yy}(d, z')\delta(z-d)] = 4\pi\delta(z-z') \quad (4.24)$$

$$\left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) g_{yz}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} [g_{xz}(0, z')\delta(z) + g_{xz}(d, z')\delta(z-d)] + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} [g_{yz}(0, z')\delta(z) + g_{yz}(d, z')\delta(z-d)] = 0 \quad (4.25)$$

$$-i k_{\parallel} \frac{d}{dz} g_{xx}(z, z') + \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2\right) g_{zx}(z, z') = 0 \quad (4.26)$$

$$-k_{\parallel} \frac{d}{dz} g_{xy}(z, z') + \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2\right) g_{zy}(z, z') = 0 \quad (4.27)$$

$$-i k_{\parallel} \frac{d}{dz} g_{xz}(z, z') + \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2\right) g_{zx}(z, z') = 4\pi\delta(z-z') \quad (4.28)$$

Se desacoplan las ecuaciones (4.20) a (4.28) de la siguiente forma: se examina la ecuación (4.20) y se trata de eliminar la componente g_{zx} , introduciendo la variable

$$\kappa^2 = k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \quad \text{y despejando de la ecuación (4.26) la componente } g_{xx} \text{ igual a}$$

$$g_{zx}(z, z') = -i \frac{k_{//}}{\kappa^2} \frac{d g_{xx}(z, z')}{d z} \quad (4.29)$$

Al reemplazar en la ecuación (4.20) se obtiene

$$\left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) g_{xx} + \frac{k_{//}^2}{\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2} \frac{d^2 g_{xx}}{d z^2} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{xx} [g_{xx}(0, z')\delta(z) + g_{xx}(d, z')\delta(z-d)] +$$

$$i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{xy} [g_{yx}(0, z')\delta(z) + g_{yx}(d, z')\delta(z-d)] = 4\pi\delta(z-z')$$

Luego de factorizar g_{zx} se obtiene

$$\frac{\varepsilon}{\kappa^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) g_{xx}(z, z') - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} [g_{xx}(0, z')\delta(z) + g_{xx}(d, z')\delta(z-d)] -$$

$$i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} [g_{yx}(0, z')\delta(z) + g_{yx}(d, z')\delta(z-d)] = -\frac{4\pi c^2}{\omega^2} \delta(z-z') \quad (4.30)$$

Examinando la ecuación (4.21) y despejando la componente $g_{zy}(z, z')$ de (4.27) se encuentra que

$$g_{zx}(z, z') = -i \frac{k_{//}}{\kappa^2} \frac{d g_{xy}}{d z} \quad (4.31)$$

Por lo tanto, la ecuación (4.21) queda de la forma

$$\frac{\varepsilon}{\kappa^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) g_{xy}(z, z') - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} [g_{xy}(0, z')\delta(z) + g_{xy}(d, z')\delta(z-d)] -$$

$$i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} [g_{yy}(0, z')\delta(z) + g_{yy}(d, z')\delta(z-d)] = 0 \quad (4.32)$$

En forma análoga, para las ecuaciones (4.22) y (4.28) se deduce que

$$g_{zz}(z, z') = -i \frac{k_{//}}{\kappa^2} \frac{d g_{xz}}{d z} - \frac{4\pi}{\kappa^2} \delta(z-z') \quad (4.33)$$

y la ecuación (4.22) queda de la forma

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{\kappa^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) g_{xz}(z, z') - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} [g_{xz}(0, z')\delta(z) + g_{xz}(d, z')\delta(z-d)] - \\ & i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} [g_{yz}(0, z')\delta(z) + g_{yz}(d, z')\delta(z-d)] = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Las ecuaciones (4.23), (4.24) y (4.25) se pueden escribir de la forma

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) g_{yx}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} [g_{xx}(0, z')\delta(z) + g_{xx}(d, z')\delta(z-d)] + \\ & i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} [g_{yx}(0, z')\delta(z) + g_{yx}(d, z')\delta(z-d)] = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) g_{yy}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} [g_{xy}(0, z')\delta(z) + g_{xy}(d, z')\delta(z-d)] + \\ & i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} [g_{yy}(0, z')\delta(z) + g_{yy}(d, z')\delta(z-d)] = 4\pi\delta(z-z') \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) g_{yz}(z, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} [g_{xz}(0, z')\delta(z) + g_{xz}(d, z')\delta(z-d)] + \\ & i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} [g_{yz}(0, z')\delta(z) + g_{yz}(d, z')\delta(z-d)] = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para obtener las componentes del tensor de Green se deben resolver las ecuaciones (4.29) a (4.37), utilizando las condiciones de frontera en la película delgada 2DEG en las superficies $z = 0$ y $z = d$. Se ilustrará el método para una componente, por ejemplo g_{xx} , y las demás se resuelven de forma análoga.

4.4 Condiciones de frontera para las componentes del tensor de Green

Para resolver este sistema de ecuaciones, (4.29) a (4.37), se deben considerar las condiciones de frontera para dichas componentes. Se determinan las condiciones de frontera que satisfacen las componentes del tensor g_{ij} en las superficies con el gas electrónico bidimensional (2D). Si $z' \neq 0$ y $z' \neq d$, entonces las ecuaciones (4.30), (4.32) y (4.34) tienen una estructura general común. Por ejemplo, se analiza a continuación la ecuación (4.32). Sea

$$g_{xy}(z, z') \begin{cases} g_{xy}^I, & z < 0 \\ g_{xy}^{II}, & 0 < z < d \\ g_{xy}^{III}, & z > d \end{cases},$$

se integra la ecuación (4.32) cerca de la superficie $z = 0$ y se obtiene

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{k_2^2} \frac{d g_{xy}^{II}}{dz} - \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1^2} \frac{d g_{xy}^I}{dz} \right)_{z=0} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} g_{xy}^I(0, z') - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} g_{yy}^I(0, z') = 0 \quad (4.38)$$

Ahora, si se integra la ecuación (4.30) cerca de la superficie $z = d$, se encuentra que

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{k_1^2} \frac{d g_{xy}^{III}}{dz} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2^2} \frac{d g_{xy}^{II}}{dz} \right)_{z=d} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} g_{xy}^{III}(d, z') - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} g_{yy}^{III}(d, z') = 0 \quad (4.39)$$

Una condición similar se obtiene para (4.30) y (4.32) en $z = 0$ y $z = d$. Se determinan ahora las condiciones de frontera para g_{yx} , g_{yy} y g_{yz} . Si se integra la ecuación (4.35) cerca de la superficie $z = 0$ se obtiene

$$\left(\frac{d g_{yx}^{II}}{dz} - \frac{d g_{yx}^I}{dz} \right)_{z=0} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} g_{xx}^I(0, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} g_{yx}^I(0, z') = 0, \quad (4.40)$$

y cerca de la superficie $z = d$

$$\left(\frac{d g_{yx}^{III}}{dz} - \frac{d g_{yx}^{II}}{dz} \right)_{z=d} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} g_{xx}^{III}(d, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} g_{yx}^{III}(d, z') = 0 \quad (4.41)$$

En forma análoga, se obtiene para las ecuaciones (4.36) y (4.37). Nótese que las ecuaciones (4.34) y (4.37) son homogéneas y acopladas con respecto a las funciones g_{xz} y g_{yz} . De esta forma

$$g_{xz}(z, z) = 0 \text{ y } g_{yz}(z, z) = 0 \quad (4.42)$$

Las ecuaciones (4.30) y (4.35) son acopladas con respecto a las funciones g_{xx} y g_{yx} . Así mismo, las ecuaciones (4.32) y (4.36) están acopladas con respecto a las funciones g_{xy} y g_{yy} . Se resuelven estas ecuaciones para el caso $0 < z' < d$, que corresponde al caso experimental del artículo sobre absorción magneto infrarroja en pozos cuánticos con altas densidades electrónicas, de Poulter y Zeman [2].

Se tendrán en cuenta las siguientes fórmulas para la solución de las componentes del tensor de Green:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) \frac{e^{-k|z-z'|}}{2k} = -\delta(z-z') \quad (4.43)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) \frac{1}{2} e^{-k|z-z'|} = \frac{d}{dz} \delta(z-z') \quad (4.44)$$

4.5 Solución al sistema homogéneo de ecuaciones

Cálculo de las componentes del tensor de Green g_{xx} , g_{yy} y g_{zz} en la región $0 < z < d$.

(a) La solución al sistema de ecuaciones (4.30) y (4.35) es de la forma

Región I:

$$\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_1^2\right) g'_{xx}(z, z') = 0 \Rightarrow g'_{xx}(z, z') = A'_{xx} e^{\kappa_1 z}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_2^2\right) g'_{yx}(z, z') = 0 \Rightarrow g'_{yx}(z, z') = A'_{yx} e^{\kappa_1 z}$$

Región II:

$$\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_2^2\right) g''_{xx}(z, z') = -\frac{4\pi c^2}{\omega^2} \delta(z-z')$$

$$\Rightarrow g''_{xx}(z, z') = A''_{xx} e^{\kappa_2 z} + B''_{xx} e^{-\kappa_2 z} + \frac{4\pi \kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 |z-z'|}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_2^2\right) g''_{yx}(z, z') = 0 \Rightarrow g''_{yx}(z, z') = A''_{yx} e^{\kappa_2 z} + B''_{yx} e^{-\kappa_2 z}$$

Región III:

$$\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_1^2\right) g'''_{xx}(z, z') = 0 \Rightarrow g'''_{xx}(z, z') = A'''_{xx} e^{-\kappa_1(z-d)}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_1^2\right) g'''_{yx}(z, z') = 0 \Rightarrow g'''_{yx}(z, z') = A'''_{yx} e^{-\kappa_1(z-d)}$$

Se aplican las condiciones de frontera para determinar las constantes $A_{xx}^I, A_{xx}^{II}, A_{xx}^{III}, A_{yx}^I, A_{yx}^{II}, A_{yx}^{III}$.

i) En la superficie $z = 0$ se tiene

$$g_{xx}^{II}(0, z') = g_{xx}^I(0, z')$$

es decir,

$$A_{xx}^{II} + B_{xx}^{II} + \frac{4\pi\kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 z'} = A_{xx}^I \quad (4.45)$$

De la condición

$$\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2^2} \frac{d g_{xx}^{II}}{d z} - \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1^2} \frac{d g_{xx}^I}{d z} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} g_{xx}^I(0, z') - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} g_{yx}^I(0, z') = 0$$

se obtiene

$$\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} \left(A_{xx}^{II} - B_{xx}^{II} + \frac{4\pi\kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 d} \right) - \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} A_{xx}^I - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} A_{xx}^I - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} A_{yx}^I = 0 \quad (4.46)$$

Así mismo, de la condición

$$g_{yx}^{II}(0, z') = g_{yx}^I(0, z')$$

resulta la expresión

$$A_{yx}^{II} + B_{yx}^{II} = A_{yx}^I \quad (4.47)$$

Por último, de la condición de frontera cerca de la superficie $z = 0$ de la forma

$$\frac{d g_{yx}^{II}}{d z} - \frac{d g_{yx}^I}{d z} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} g_{xx}^I(0, z') + \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} g_{yx}^I(0, z') = 0$$

se deduce que

$$\kappa_2 (A_{yx}^{II} - B_{yx}^{II}) - \kappa_1 A_{yx}^I + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} A_{xx}^I + \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} A_{yx}^I = 0 \quad (4.48)$$

ii) En la superficie $z = d$ se tiene

$$g_{xx}^{III}(d, z') = g_{xx}^{II}(d, z'),$$

es decir,

$$A_{xx}^{II} e^{\kappa_2 d} + B_{xx}^{II} e^{-\kappa_2 d} + \frac{4\pi\kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2(d-z')} = A_{xx}^{III} \quad (4.49)$$

De la condición

$$\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1^2} \frac{d g_{xx}^{III}}{dz} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2^2} \frac{d g_{xx}^{II}}{dz} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} g_{xx}^{III}(d, z') - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} g_{yx}^{III}(d, z') = 0$$

se obtiene

$$-\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} A_{xx}^{III} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} \left[A_{xx}^{II} e^{\kappa_2 d} - B_{xx}^{II} e^{-\kappa_2 d} - \frac{4\pi\kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2(d-z')} \right] - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} A_{xx}^{III} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} A_{yx}^{III} = 0 \quad (4.50)$$

Así mismo, de la condición

$$g_{yx}^{III}(d, z') = g_{yx}^{II}(d, z')$$

resulta la expresión

$$A_{yx}^{II} e^{\kappa_2 d} - B_{yx}^{II} e^{-\kappa_2 d} = A_{yx}^{III} \quad (4.51)$$

Por último, de la condición de frontera cerca de la superficie $z = d$ de la forma

$$\frac{d g_{yx}^{III}}{dz} - \frac{d g_{yx}^{II}}{dz} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} g_{xx}^{III}(d, z') + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} g_{yx}^{III}(d, z') = 0$$

se deduce que

$$-\kappa_1 A_{yx}^{III} - \kappa_2 (A_{yx}^{II} e^{\kappa_2 d} - B_{yx}^{II} e^{-\kappa_2 d}) + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} A_{xx}^{III} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} A_{yx}^{III} = 0 \quad (4.52)$$

De las ecuaciones (4.45) y (4.47) se eliminan A_{xx}^I y A_{yx}^I , al reemplazar estos términos en (4.46), obteniéndose la expresión

$$\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} (A_{xx}^{II} - B_{xx}^{II}) + \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} \frac{4\pi\kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 z'} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} \right) \left[A_{xx}^{II} + B_{xx}^{II} + i \frac{4\pi\kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} \right] - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} [A_{yx}^{II} + B_{yx}^{II}] = 0$$

Agrupando términos semejantes, la anterior expresión se reduce a

$$\begin{aligned}
& A_{xx}'' \left[\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} - \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} \right] - B_{xx}'' \left[\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} + \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} \right] - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} A_{yx}'' - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} B_{yx}'' = \\
& \left(\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} \right) \frac{4\pi \kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 z'} \quad (4.53)
\end{aligned}$$

De forma análoga, se eliminan los términos A_{xx}^I y A_{yx}^I de la ecuación (4.48). Se obtiene

$$\begin{aligned}
& \kappa_2 (A_{yx}'' - B_{yx}'') - \kappa_1 (A_{yx}'' + B_{yx}'') + i \frac{4\pi \omega}{c^2} \sigma_{yx} \left(A_{xx}'' + B_{xx}'' + \frac{4\pi \kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 z'} \right) + \\
& i \frac{4\pi \omega}{c^2} \sigma_{yy} (A_{yx}'' + B_{yx}'') = 0
\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes, se tiene que

$$\begin{aligned}
& i \frac{4\pi}{c^2} \sigma_{yx} A_{xx}'' + i \frac{4\pi \omega}{c^2} \sigma_{yx} B_{xx}'' + A_{yx}'' \left(\kappa_2 - \kappa_1 + i \frac{4\pi \omega}{c^2} \sigma_{yy} \right) - B_{yx}'' \left(\kappa_2 + \kappa_1 - i \frac{4\pi \omega}{c^2} \sigma_{yy} \right) = \\
& -i \frac{4\pi \omega}{c^2} \sigma_{yx} + \frac{4\pi \kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 z'} \quad (4.54)
\end{aligned}$$

De la ecuación (4.48) eliminamos A_{xx}''' y A_{yx}''' . Se tiene

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} \left[A_{xx}'' e^{\kappa_2 d} + B_{xx}'' e^{-\kappa_2 d} + \frac{4\pi \kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 (d-z')} \right] - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} \left[A_{xx}'' e^{\kappa_2 d} - B_{xx}'' e^{-\kappa_2 d} - \frac{4\pi \kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 (d-z')} \right] - \\
& i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} \left[A_{xx}'' e^{\kappa_2 d} + B_{xx}'' e^{-\kappa_2 d} + \frac{4\pi \kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 (d-z')} \right] - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} \left[A_{yx}'' e^{\kappa_2 d} + B_{yx}'' e^{-\kappa_2 d} \right] = 0
\end{aligned}$$

Agrupando los términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned}
& -A_{xx}'' e^{\kappa_2 d} \left[\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} \right] - B_{xx}'' e^{-\kappa_2 d} \left[\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} \right] - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{yx} A_{yx}'' e^{\kappa_2 d} - \\
& i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} B_{yx}'' e^{-\kappa_2 d} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} \right) \frac{4\pi \kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 (d-z')} \quad (4.55)
\end{aligned}$$

De la ecuación (4.52) se eliminan los términos A_{xx}''' y A_{yx}''' . Es decir,

$$\begin{aligned}
& -\kappa_1 (A_{yx}'' e^{\kappa_2 d} + B_{yx}'' e^{-\kappa_2 d}) - \kappa_2 (A_{yx}'' e^{\kappa_2 d}) - \kappa_2 (A_{yx}'' e^{\kappa_2 d} - B_{yx}'' e^{-\kappa_2 d}) + \\
& i \frac{4\pi \omega}{c^2} \sigma_{yx} \left[A_{xx}'' e^{\kappa_2 d} + B_{xx}'' e^{-\kappa_2 d} + \frac{4\pi \kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2 (d-z')} \right] + \\
& i \frac{4\pi \omega}{c^2} \sigma_{yy} \left[A_{yx}'' e^{\kappa_2 d} + B_{yx}'' e^{-\kappa_2 d} \right] = 0
\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned}
 & i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} A_{xx}'' e^{\kappa_2 d} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} B_{xx}'' e^{-\kappa_2 d} - A_{yx}'' e^{\kappa_2 d} \left(\kappa_1 + \kappa_2 - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} \right) - \\
 & B_{yx}'' e^{-\kappa_2 d} \left(\kappa_1 - \kappa_2 + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} \right) = -i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx} \left[\frac{4\pi\kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{-\kappa_2(d-z')} \right]
 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Se introduce de ahora en adelante la siguiente notación:

$$f_{\pm} = \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} \pm \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx}, \quad f_H = i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{yx}$$

$$F = \frac{4\pi\kappa_2 c^2}{\varepsilon_2 \omega^2} e^{\kappa_2 z}, \quad g_{\pm} = \kappa_1 \pm \kappa_2 - \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy}, \quad g_H = i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx}$$

El sistema de ecuaciones (4.53) a (4.56) toma la forma

$$f_- A_{xx}'' + f_+ B_{xy}'' + f_H A_{yx}'' + f_H B_{yx}'' = -f_- F e^{-\kappa_2 z'} \quad (4.57)$$

$$f_+ e^{k_2 d} A_{xx}^I + f_- e^{-k_2 d} B_{xx}^I + f_H e^{k_2 d} A_{yx}^I + f_H e^{-k_2 d} B_{yx}^I = -f_- e^{-k_2 d} F e^{k_2 z'} \quad (4.58)$$

$$g_H A_{xx}^I + g_H B_{xx}^I + g_- A_{yx}^I + g_+ B_{yx}^I = g_H F e^{-k_2 z'} \quad (4.59)$$

$$g_H e^{k_2 d} A_{xx}^I + g_H e^{-k_2 d} B_{xx}^I + g_+ e^{k_2 d} A_{yx}^I + g_- e^{-k_2 d} B_{yx}^I = g_H e^{-k_2 d} F e^{k_2 z'} \quad (4.60)$$

El determinante Δ del sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_- & f_+ & f_H & f_H \\ f_+ e^{k_2 d} & f_- e^{-k_2 d} & f_H e^{k_2 d} & f_H e^{-k_2 d} \\ g_H & g_H & g_- & g_+ \\ g_H e^{k_2 d} & g_H e^{-k_2 d} & g_+ e^{k_2 d} & g_- e^{-k_2 d} \end{vmatrix}$$

Los determinantes necesarios para calcular las componentes A_{xx}^I y B_{xx}^I son

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} f_- e^{-k_2 z'} & f_+ & f_H & f_H \\ -f_- e^{-k_2(d-z)} & f_- e^{-k_2 d} & f_H e^{k_2 d} & f_H e^{-k_2 d} \\ g_H e^{-k_2 z'} & g_H & g_- & g_+ \\ g_H e^{-k_2(d-z)} & g_H e^{-k_2 d} & g_+ e^{k_2 d} & g_- e^{-k_2 d} \end{vmatrix}$$

y

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} f_- & -f_- e^{-k_2 z'} & f_H & f_H \\ f_+ e^{k_2 d} & -f_- e^{-k_2(d-z)} & f_H e^{k_2 d} & f_H e^{-k_2 d} \\ g_H & g_H e^{-k_2 z'} & g_- & g_+ \\ g_H e^{k_2 d} & g_H e^{-k_2(d-z)} & g_+ e^{k_2 d} & g_- e^{-k_2 d} \end{vmatrix}$$

De forma explícita, el determinante Δ queda de la forma

$$\Delta = 4sh^2(\kappa_2 d) \left[\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} + \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} \coth\left(\frac{\kappa_2 d}{2}\right) \right] \left[\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} + \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} th\left(\frac{\kappa_2 d}{2}\right) \right] \times \left[\kappa_1 - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2^2} \coth\left(\frac{\kappa_2 d}{2}\right) \right] \left[\kappa_2 - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2^2} th\left(\frac{\kappa_2 d}{2}\right) \right] - \left(\frac{4\pi}{c} \sigma_{xy} \right)^2 \quad (4.61)$$

Por métodos numéricos se determina el poder espectral de las componentes g_{xx} , g_{yy} y g_{zz} en la región $0 < z < d$, donde $z \in (0, d)$. Obsérvese que para hallar la componente g_{zz} se requiere conocer g_{xz} y g_{yz} . Es decir, se requiere resolver conjuntamente las ecuaciones (4.34) y (4.37), de acuerdo con la expresión

$$g_{zz} = -i \frac{k_{//}}{\kappa^2} \frac{d g_{xz}}{dz} - \frac{4\pi}{\kappa^2} \delta(z - z')$$

Después de realizar un procedimiento similar al utilizado para calcular la componente g_{xx} , se obtiene que

$$g_{zz} = -\frac{4\pi}{\kappa^2} \delta(z - z') \quad (4.62)$$

La ecuación (4.62) corresponde al propagador de una onda que no interactúa con las superficies del sistema ni con el gas electrónico bidimensional (2DEG).

Unidad IV

Pozo cuántico

Se calculan las componentes del propagador fotónico en un pozo cuántico con alta densidad electrónica en un campo magnético transversal. Sobre esta base se determinan el poder espectral y las curvas de dispersión de los conjuntos de modos colectivos que aparecen en tal sistema, cuando la frecuencia ciclotrónica ω_c toma valores en la región *reststrahlen* del espectro. Se discuten las resonancias entre la frecuencia ciclotrónica y los modos ópticos transversal *TO* y longitudinal *LO* [1]. Se analiza el caso del pozo cuántico con una doble capa de electrones bidimensionales (2D).

Se estudian las condiciones que permiten las resonancias entre la frecuencia ciclotrónica ω_c y los modos *TO* y *LO* en la región del espectro, donde los efectos de retardo se toman en cuenta. Se encuentra que para frecuencias ciclotrónicas en la región óptica retardada del espectro las frecuencias iniciales de las oscilaciones en fase cercanas a ω_c presentan un corrimiento proporcional a la densidad de portadores y al campo aplicado.

En el campo experimental se obtienen heteroestructuras, pozos cuánticos y superredes con capas de diferentes materiales, utilizando el método del crecimiento molecular epitaxial (MBE), lo cual ha permitido la investigación de diversas propiedades ópticas, de transporte, magnéticas y optoelectrónicas de dichos sistemas. De esta forma, para la producción de superredes se toman dos materiales semiconductores diferentes con estructura y parámetros de red similares. Una monocapa del material *A* tiene m átomos sobre los cuales son depositados, de manera muy fina, casi átomo por átomo, n átomos de la monocapa del material *B* para formar una nueva celda del tamaño $(m + n)$, átomos con un espaciamiento de red L en

la dirección z , la dirección de crecimiento de la superred. Una muestra macroscópica de tal superred A - B es un nuevo material volumétrico que tiene propiedades intermedias entre el material A y el material B .

Por ejemplo, en el sistema $GaAs-Al^kGa^{1-x}As$ la banda prohibida del $GaAs$ está contenida totalmente dentro de la banda prohibida del $Al^kGa^{1-x}As$, dando lugar a una discontinuidad de la banda prohibida entre la banda de valencia y de conducción del sistema de superred resultante (Figura 5.1). Esta discontinuidad de la banda prohibida en la interfase de los dos materiales lleva a la aparición de un pozo de potencial en la banda de conducción de las capas de $GaAs$ separadas por una barrera de potencial en las capas de $Al^kGa^{1-x}As$. Esto se logra mediante la técnica de dopaje modulado produciendo donadores ionizados en estas capas. Los electrones liberados por estos donadores penetran al pozo de potencial en el lado del $GaAs$. El pozo de potencial unidimensional cuantiza el movimiento electrónico a lo largo de la dirección de la superred (eje z), y la banda de conducción del $GaAs$ se desdobra en una serie de subbandas, cada una de las cuales representa un movimiento electrónico “libre” de masa efectiva en el plano perpendicular a la dirección de la superred (plano xy). Si la densidad electrónica no es lo suficientemente alta, de manera que solamente las subbandas inferiores estén ocupadas por electrones, entonces tal multicapa a bajas temperaturas se puede concebir como un sistema periódico de capas de gas electrónico bidimensional (2DEG). Este sistema presenta una alta movilidad con relación a la separación espacial de las impurezas donadoras ionizadas (en las capas de $Al^kGa^{1-x}As$) y movilidad de los portadores (en las capas de $GaAs$).

Adicionalmente, se estudian y describen las oscilaciones colectivas en dicho sistema. El movimiento de los iones en el cristal iónico se puede describir como una suma de movimientos de osciladores independientes, que corresponden a oscilaciones armónicas (oscilaciones colectivas de tipo fonónico). Los fonones están asociados a las deformaciones dinámicas del cristal. Estos modos colectivos se describen mediante la dependencia de la frecuencia ω de las oscilaciones con respecto al vector de onda \vec{k} (ley de dispersión). En un cristal complejo, como el $GaAs$, existen modos acústicos (cuyas frecuencias tienden a cero a grandes longitudes de onda, es decir, para $k \rightarrow 0$) y modos ópticos (cuyas frecuencias son diferentes de cero para $k \rightarrow 0$). Los primeros modos corresponden a oscilaciones en fase de los iones en la red cristalina, mientras que los modos ópticos corresponden a oscilaciones en oposición de fase. El límite de grandes longitudes de onda ($k=0$, $\lambda \rightarrow \infty$), equivalente al desplazamiento del cristal como un todo, y la propiedad señalada para el modo acústico ($\omega \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow 0$), es una consecuencia directa de la invariancia de la energía del cristal con relación a su desplazamiento traslacional como un todo [2, 3].

El sistema electrónico también presenta oscilaciones colectivas, las cuales reciben el nombre de plasmones. La frecuencia de estos, denominada frecuencia de plasma ω_p , depende de la concentración N de portadores y su masa efectiva m^* mediante la relación

$$\omega_p = \sqrt{(4 \pi N e^2) / m^*}$$

5. Formalismo de la función de Green para el estudio del papel de los magneto-plasmones 2D en absorción infrarroja en pozos cuánticos con campo externo y altas densidades electrónicas

5.1 Introducción

El estudio de las dinámicas de los electrones bajo la acción de un campo magnético es una herramienta importante para el entendimiento de los procesos que ocurren en los sistemas físicos. La resonancia ciclotrónica de alta densidad y alta movilidad de la carga espacial electrónica en las capas de pozos cuánticos delgados de *GaAs*, con una geometría de Faraday a frecuencias que cubren el régimen *reststrahlen* del *GaAs*, es considerado experimentalmente por Poulter et al. [4, 5]. Este fenómeno se observa en condiciones resonantes, cuando la resonancia ciclotrónica alcanza energías cerca de la energía del *fonón óptico longitudinal LO*, no hay interacción entre los modos fonónico y ciclotrónico. En cambio, se observa una interacción con el modo que tiene una energía cerca al *fonón óptico transversal TO*. Los resultados fueron interpretados con referencia a un modelo apropiado solamente para un sistema del bulk (volumétrico) acoplado a un modo colectivo *magneto-plasmón-fonón*.

Este modelo fue criticado por Zhang et al. [6], y se incluyeron algunas consideraciones cualitativas sobre el carácter de los espectros en el límite de longitud de onda larga. Es necesario enfatizar que en el sistema considerado por Poulter et al. [4, 5] es posible tener dos capas de gas electrónico bidimensional (2D), el cual tiene un espectro de oscilaciones colectivas con dispersiones, dependiendo del vector de onda \vec{k} paralelo al plano de la capa.

Al oscilar colectivamente los electrones, se induce un campo eléctrico bajo el cual oscilan los iones de la red; y a su vez las oscilaciones de la red afectan la dinámica de los electrones, generándose así una *polarización autoinducida*. El acople entre los portadores y el campo de deformación asociado a los *fonones* en un cristal iónico (o en un semiconductor polar) lleva a que se forme una cuasipartícula que consiste en un electrón (o hueco) de conducción, junto con su *polarización autoinducida*. Esta cuasipartícula es llamada *polarón* [7-9].

5.2 Descripción del sistema

La estructura de la Figura 5.1 consiste en una película de $GaAs$ de doble interfase y espesor L , situada entre dos superredes de $GaAsAl$ dopadas, las cuales suministran portadores de carga que se localizan en la región de la película de $GaAs$. Se aplica un campo magnético estacionario y uniforme en dirección perpendicular a las interfaces, el cual, evidentemente, afecta la dinámica del sistema electrónico presente en el pozo de $GaAs$. Se plantea como objetivo examinar la absorción de ondas electromagnéticas en la región del infrarrojo en tal sistema. Para esta discusión es esencial tener en cuenta que el pozo de $GaAs$ está constituido por un material iónico con un sistema de electrones fuertemente localizados en la dirección de crecimiento de la heteroestructura, pero casi libres de moverse en dirección paralela a las interfaces. Por lo tanto, los campos electromagnéticos asociados al movimiento conjunto de los iones y los electrones deberán interactuar con los campos eléctrico y magnético de la onda que penetra en el sistema. Esto es posible si al incidir la onda electromagnética en la muestra, su frecuencia es igual a la del modo de oscilación del electrón-fonón, es decir, si se presenta resonancia. Si esta frecuencia de resonancia es del orden de 10^{13} hz, se dice que se presenta absorción infrarroja.

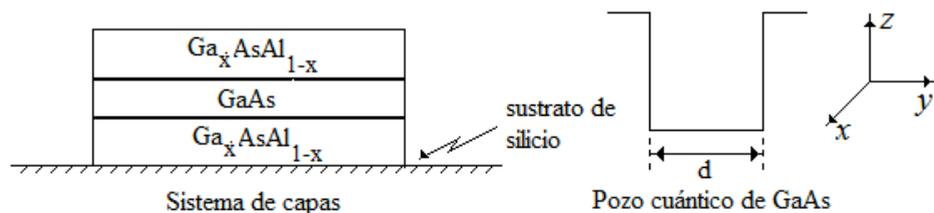


Figura 5.1

Modelo simple de una capa de $AsGa_{1-x}Al_x$.

Este sistema se analizó recientemente en el trabajo de Poulter y Zeman [10]. Sin embargo, en dicho reporte los resultados concernientes a la absorción infrarroja fueron interpretados a la luz de un modelo que considera la presencia de un *plasmón tridimensional* (3D) en el pozo de $GaAs$. Pero en realidad, en tal pozo cuántico existe un gas electrónico cuasibidimensional (2D), que se manifiesta como sistema tridimensional únicamente cuando la longitud de onda de las excitaciones colectivas es grande en comparación con el espesor L de la capa de $GaAs$. Cuando esto no ocurre, se altera significativamente la estructura de la expresión de la función dieléctrica $\epsilon(\omega)$ del sistema. Por esta razón se hace la propuesta de tomar en cuenta el carácter bidimensional de los modos electrónicos colectivos (*magneto-plasmones bidimensionales*). Con esta nueva consideración, se encuentran nuevas propiedades de los modos acoplados longitudinales característicos de este sistema.

A continuación se considera un *pozo cuántico* de arseniuro de galio (*GaAs*) altamente dopado, intercalado entre dos medios infinitos y de ancho d , ocupando la región $0 < z < d$. Se asume que el plano xy presenta homogeneidad e isotropía. Se discute el carácter del acoplamiento *magnetoplasmón-fonón*, el cual puede surgir en el sistema considerado.

5.3 Antecedentes

En el trabajo experimental de Poulter y Zeman [10], anteriormente referenciado, se reporta la Figura 5.2, donde se observan dos picos de resonancia correspondientes a modos ópticos transversales de $\omega_{TO} = 33.6 \text{ meV}$ (*GaAs*) y de $\omega_{TO} = 45 \text{ meV}$ (*AlAs*). Pero además aparece un pico nuevo, no registrado antes en la literatura, que corresponde a un modo de oscilación acoplado del sistema descrito. Al disminuir el campo magnético, este pico va presentando un corrimiento hacia la izquierda, y para un campo magnético de 22.5 T se observa un desdoblamiento que ocurre en la región de absorción infrarroja.

De acuerdo con un modelo de permitividad dieléctrica de multicapas, se encuentra que este nuevo pico corresponde a un modo óptico longitudinal. Este modelo se basa en la teoría de la respuesta lineal y asume una configuración de Faraday, donde el campo magnético es perpendicular a la superficie de la película. Si se desprecia el efecto de amortiguamiento y se tiene en cuenta el efecto polarónico asociado a los portadores, la función dieléctrica para este sistema de plasma-fonón de un gas 3D de *GaAs* es igual a

$$\varepsilon_{\alpha}(\omega) = \varepsilon_{\infty} \frac{\omega_{LO}^2 - \omega^2}{\omega_{TO}^2 - \omega^2} - \frac{4\pi e^2}{L\omega} G_B \sum_{n=0}^{\infty} \sum_n \frac{(f_{n,\sigma} - f_{n+1,\sigma})(n+1)}{[\omega - \frac{E_{n+1,\sigma} - E_{n,\sigma}}{\hbar}] m_{n,m}^*} \quad (5.1)$$

donde α toma los valores de 1 para el *GaAs* y 2 para el *AlAs*, $\varepsilon_{\infty} = 10.6$ (*GaAs*) es la constante dieléctrica para altas frecuencias, $f_{n,\sigma}$ es la función distribución Fermi-Dirac para los portadores (electrones), $\sigma = (\pm 1/2)$ es el espín del portador,

$$G_B = \frac{eB}{\hbar}$$

es la degeneración en el n -ésimo nivel de Landau (LL), $E_{n,\sigma}$ es la energía para el estado energético n y para el espín σ , $n_s = \sum_{n,\sigma} G_B (f_{n,\sigma} - f_{n+1,\sigma})(n+1)$ es la concentración superficial de los portadores, $m_{n,\sigma}^*$ es la masa efectiva del portador y, finalmente, $\omega_c = eB/m^*$ es la frecuencia ciclotrónica de los portadores.

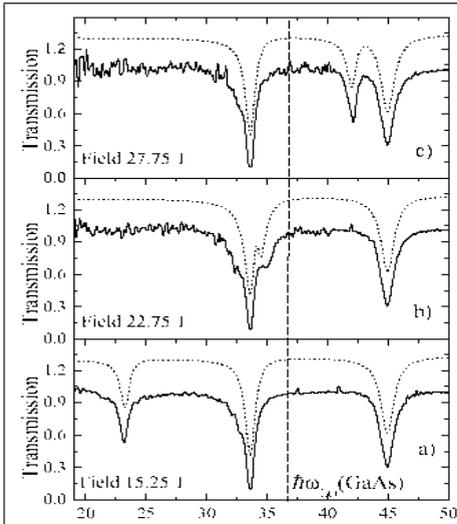


Figura 5.2

Coeficiente de transmisión versus energía de la excitación colectiva para el GaAs y el AlAs. La línea punteada vertical corresponde a la energía asociada al modo longitudinal en el GaAs.

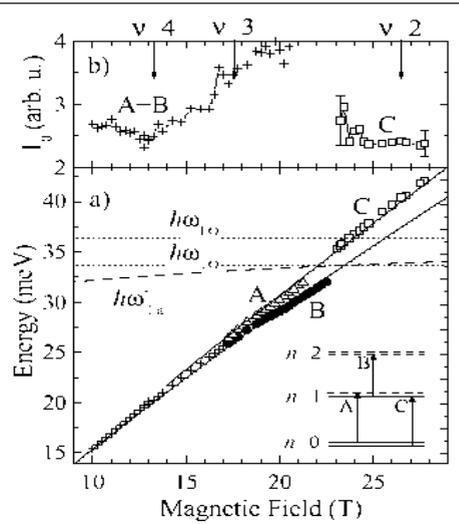


Figura 5.3

Variación con respecto al campo magnético de las diferentes energías o líneas de resonancia ciclotrónica. Obsérvese el desdoblamiento que se presenta para campos magnéticos cercanos a 22.75 T.

La expresión (5.1) se puede representar en una forma más simple utilizando la relación entre la concentración de portadores y la frecuencia de plasma ω_p . Se obtiene

$$\epsilon_\alpha(\omega) = \epsilon_\infty \frac{\omega_{LO}^2 - \omega^2}{\omega_{TO}^2 - \omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}, \quad (5.2)$$

donde $N = n_s / L$ es la densidad electrónica efectiva 3D.

Se sabe que los ceros de la función dieléctrica, es decir $\epsilon(\omega) = 0$, corresponden a modos de vibración longitudinales. Para el caso de la expresión (5.2), se obtienen dos modos longitudinales, uno, W^- , con frecuencias más bajas que el otro, W^+ . La absorción infrarroja, al aplicar un campo magnético de 22.75 T, se obtiene cuando W^- coincide con la frecuencia del fonón óptico transversal ω_{TO} para el GaAs. En la Figura 5.3 se revela que el desdoblamiento entre los picos A y B corresponde a efectos asociados a transiciones entre los niveles de Landau $n=0$ y $n=1$. Se ve que existen dos modos colectivos longitudinales acoplados W^- y W^+ y cuando la frecuencia ciclotrónica se iguala a la frecuencia del modo óptico transversal, es decir, si $\omega_{TO} = \omega_c$, el modo W^- tiene un valor de frecuencia que se aproxima a la frecuencia de los fonones ópticos transversales $W^- \rightarrow \omega_{TO}$. Es decir, una onda de carácter longitudinal, como lo es el modo W^- , entra en resonancia con un modo

óptico transversal de oscilación de los portadores en la red cristalina, como es el modo ω_{TO} .

Con el objetivo de reinterpretar estos resultados experimentales, se desarrolla un modelo teórico del sistema electrónico confinado.

5.4 Modelo teórico

Se aplica un campo magnético \vec{H} perpendicular al plano del pozo (geometría de Faraday). La función dieléctrica del sistema es de la forma

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_1 [\theta(-z) + \theta(z-d)] + \varepsilon_2(\omega) [\theta(z)\theta(d-z)], \quad (5.3)$$

donde

$$\varepsilon_2(\omega) = \varepsilon_\infty \frac{\omega^2 - \omega_{LO}^2}{\omega(\omega + i\gamma_{TO}) - \omega_{TO}^2}, \quad (5.4)$$

siendo ε_∞ la permitividad dieléctrica del pozo a altas frecuencias. Las frecuencias del modo óptico transversal, longitudinal y el amortiguamiento son TO , respectivamente, ω_{TO} , ω_{LO} y γ_{TO} . Dos capas de gas electrónico bidimensional (2D) con alta concentración de portadores n^s se localizan en la superficie $z=0, d$.

La dinámica de este sistema electrónico induce una densidad de corriente

$$j_i(\vec{r}, t) = \sigma_{ij} \left[E_j(\vec{r}_{//}, 0, t) \delta(z) + E_j(\vec{r}_{//}, d, t) \delta(z-d) \right], \quad (5.5)$$

donde $\vec{r} = (\vec{r}_{//}, z)$, σ_{ij} es el tensor de magnetoconductividad del gas electrónico 2D y $E(\vec{r}_{//}, z, t)$ es el campo eléctrico dinámico en z . Usando una calibración en la que el potencial escalar se anula y en la presencia de una corriente externa, $\vec{j}^{ext}(\vec{r}_{//}, z, \omega)$, el potencial vectorial magnético puede ser escrito de la forma

$$A_j(\vec{r}_{//}, z, \omega) = -\frac{1}{c} \int d^2 \vec{r}'_{//} dz D_{jk}(\vec{r}_{//} - \vec{r}'_{//}, z, z', \omega) j_k^{ext}(\vec{r}_{//}, z, \omega), \quad (5.6)$$

donde la dependencia con $\vec{r}_{//} - \vec{r}'_{//}$ se debe a la invariancia traslacional en el plano xy . Las componentes del tensor fotón de Green D^{jk} satisfacen el conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\left[\varepsilon(z) \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \nabla^2 \delta_{ij} \right] D_{jk}(\vec{r}_{//}, \vec{r}'_{//}, z, z'; \omega) + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{ij} \left[D_{jk}(\vec{r}_{//}, \vec{r}'_{//}, 0, z'; \omega) \delta(z) + D_{jk}(\vec{r}_{//}, \vec{r}'_{//}, d, z'; \omega) \delta(z-d) \right] = 4\pi \delta_{ik} \delta(z-z') \quad (5.7)$$

La homogeneidad del sistema permite considerar que

$$D_{jk}(\vec{r}_{||} - \vec{r}'_{||}, z, z'; \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \vec{r}_{||} d_{jk}(\vec{k}, \omega, z, z') e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_{||} - \vec{r}'_{||})}$$

Por otro lado, debido a la isotropía en el plano xy , se introduce el tensor

$$g_{jk}(\vec{k}, \omega, z, z') = S_{il}(\vec{k}) S_{mk}(\vec{k}) d_{lm}(\vec{k}, \omega, z, z'),$$

donde

$$S_{xx}(\vec{k}) = S_{yy}(\vec{k}) = \frac{k_x}{k}, \quad S_{xy}(\vec{k}) = -S_{yx}(\vec{k}) = \frac{k_y}{k}, \quad S_{zi}(\vec{k}) = S_{iz}(\vec{k}) = \delta_{iz}$$

Se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales para las componentes del tensor g_{ik} :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \varepsilon \kappa^{-2} \\ 1 \end{array} \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) \left(\begin{array}{c} g_{xk}(z, z') \\ g_{yk}(z, z') \end{array} \right) - \frac{4\pi i}{\omega} \left(\begin{array}{c} \sigma_{xi} \\ \omega^2 \sigma_{yi} / c^2 \end{array} \right) [g_{ik}(0, z') \delta(z) + g_{ik}(d, z') \delta(z-d)] \\ & = 4\pi \left(\frac{c^2}{\omega^2} \delta_{xk} + \delta_{yk} \right) \delta(z-z') \end{aligned} \quad (5.8a)$$

$$g_{zk}(k, \omega, z, z') = -\frac{ik}{\kappa^2} \frac{dg_{xk}(k, \omega, z, z')}{dz} - \frac{4\pi}{\kappa^2} \delta_{zk} \delta(z-z'), \quad (5.8b)$$

donde

$$\kappa = \left[k^2 - \varepsilon(z) \frac{\omega^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

Por brevedad, aquí se ha omitido la dependencia de \vec{k} sobre ω . Se denotan por $g_{ij}^I(z, z')$, $g_{ij}^{II}(z, z')$ y $g_{ij}^{III}(z, z')$ las componentes del tensor g_{ik} en las regiones I ($z < 0$), II ($0 < z < d$) y III ($z > d$), respectivamente. En $z = 0, d$ se tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$(g_{ik}^I - g_{ik}^{II})_{z=0} = 0$$

$$(g_{ik}^{III} - g_{ik}^{II})_{z=d} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2^2} \frac{d g_{xk}^{\text{II}}}{dz} - \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1^2} \frac{d g_{xk}^{\text{I}}}{dz} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xi} g_{ik}^{\text{I}} \right) \right]_{z=0} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1^2} \frac{d g_{xk}^{\text{III}}}{dz} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2^2} \frac{d g_{xk}^{\text{II}}}{dz} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xi} g_{ik}^{\text{III}} \right) \right]_{z=d} = 0$$

$$\left[\left(\frac{d g_{yk}^{\text{II}}}{dz} - \frac{d g_{yk}^{\text{I}}}{dz} - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yi} g_{ik}^{\text{I}} \right) \right]_{z=0} = 0$$

$$\left[\left(\frac{d g_{xk}^{\text{III}}}{dz} - \frac{d g_{xk}^{\text{II}}}{dz} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yi} g_{ik}^{\text{III}} \right) \right]_{z=d} = 0,$$

donde

$$\kappa_\alpha = \left(k^2 - \varepsilon_\alpha \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad (\alpha = 1, 2)$$

Las soluciones de (5.8a) y (5.8b), con sus condiciones de frontera y para $z > 0$, $z' < d$, son

$$\begin{pmatrix} g_{xx}^{\text{II}}(z, z') \\ g_{yy}^{\text{II}}(z, z') \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\Delta} \begin{pmatrix} c^2 \kappa_2 / (\varepsilon_2 \omega^2) \\ 1/\kappa_2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \end{pmatrix} e^{\kappa_2(z-z')} + \begin{pmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \end{pmatrix} e^{-\kappa_2(z+z')} \right\} \quad (5.9a)$$

$$g_{zz}^{\text{II}}(z, z') = \frac{4\pi}{\kappa^2} e^{-\kappa_2|z-z'|}, \quad (5.9b)$$

donde

$$\Delta = \left\{ f_-^2 (g_-^2 - e^2 g_+^2) - 2f_- f_H (g_- + e^2 g_- - 2e^2 g_+) g_H + f_H^2 g_H^2 + e^4 (f_+ g_+ - f_H g_H)^2 - e^2 [f_+^2 g_-^2 + 2f_+ f_H (-2g_- g_+) g_H + 2f_H^2 g_H^2] \right\} \frac{1}{e^2} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{xx}(\vec{k}, \omega, z') = & \left\{ e_- f_- [f_- (-g_-^2 + e^2 g_+^2) + f_H (g_- + e^2 g_- - 2e^2 g_+) g_H] + \right. \\ & e f_H g_H [f_- (-g_- + e^2 g_+) + f_H g_H + e^2 (f_+ g_- - f_+ g_+ - f_H g_H)] + \\ & e e_-^2 [f_H g_H [f_+ (g_- - e^2 g_+) + (-1 + e^2) f_H g_H] + f_- [f_+ (g_-^2 - e^2 g_+^2) + \\ & \left. f_H [-3g_- + (2 + e^2) g_+] g_H] \right\} \frac{1}{e^3 e_-} \end{aligned} \quad (5.11a)$$

$$\beta_{xx}(\vec{k}, \omega, z') = \left\{ e^2 f_H g_H [f_- (-g_- + g_+) + f_+ (g_- - e^2 g_+) + (e^2 - 1) f_H g_H] + e e_z f [f_+ (g_-^2 - e^2 g_+^2) + f_H (-2g_- + g_+ + e^2 g_+) g_H] + e_z^2 [f_-^2 (-g_-^2 + e^2 g_+^2) + e^2 f_- f_H (g_- - g_+) g_H + f_H g_H [f_H g_H + e^2 (f_+ g_- - f_+ g_+ - f_H g_H)]] \right\} \frac{1}{e^2 e_z} \quad (5.11b)$$

$$\alpha_w(\vec{k}, \omega, z') = f_H \left\{ e^2 e_z g_- (f_+ g_- - g_+ + f_- g_+ - f_H g_H) + e_z g_- (f_H g_H - f_- g_-) + e^3 [f_- g_+^2 + f_H (g_- - 2g_+) g_H - e_z^2 (g_- + g_+) (f_+ g_+ - f_H g_H)] + e [-f_- g_- (g_- + e_z^2 g_- - e_z^2 g_+) + f_H g_- g_H + e_z^2 (2f_+ g_-^2 + f_H (-3g_- + g_+) g_H)] \right\} \frac{1}{e^3 e_z} \quad (5.11c)$$

$$\beta_w(\vec{k}, \omega, z') = -f_H \left\{ e e_z g_- [f_+ g_- + f_- (-g_- + g_+) - f_H g_H] + 2e_z^2 g_- (f_H g_H - f_- g_-) + e^3 e_z g_- (-f_+ g_+ + f_H g_H) + e^4 g_+ (f_H g_H - f_+ g_+) + e^2 f_+ g_- (g_- + e_z^2 g_- - e_z^2 g_+) + f_H (g_+ - 2g_-) g_H + e_z^2 g_+ [f_- (g_- + g_+) - 2f_H g_H] \right\} \frac{1}{e^2 e_z} \quad (5.11d)$$

donde

$$f_{\pm} = \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} \pm \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx}, \quad g_{\pm} = \kappa_1 \pm \kappa_2 - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yy}, \quad f_H = i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy}, \quad g_H = i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_{yx}$$

$$e = c \exp[\kappa_2 (k_{//}, \omega, \varepsilon_z, \omega_{LO}, t) d]$$

Las leyes de dispersión de los modos colectivos que surgen en el sistema considerado corresponden a las raíces de la ecuación $\Delta = 0$. Esta relación de dispersión contiene un caso particular de modos polaritónicos confinados en un cristal iónico en una región del espectro de no retardo $\sigma_{ii} = 0$ [11] y los modos colectivos de una película con capa doble [12].

5.5 Programación de los modos característicos del sistema

En la región *reststrahlen* para campos magnéticos correspondientes a las frecuencias ciclotrónicas en el intervalo $\omega_{TO} \leq \omega_c \leq \omega_{LO}$ se usa el siguiente conjunto de parámetros [4]:

$$d = 10\text{nm}, \quad n_s = 1.28 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}, \quad \hbar\omega_{TO} = 33.6\text{meV}, \quad \omega_{LO} = 1.08\omega_{TO}, \quad \varepsilon_{\infty} = 10.6,$$

$$\gamma_{TO} = 0.25\text{meV}, \quad \gamma_e = 0.1\text{meV}, \quad m = 0.77 m_0,$$

donde m_0 es la masa del electrón libre. Para frecuencias en la región considerada, los efectos no locales en el tensor magnetoconductividad se pueden despreciar, mientras que las expresiones de Drude para σ_{ij} pueden ser usadas.

Para determinar las curvas de dispersión se realiza el siguiente algoritmo en el programa *Mathematica de Wolfram Research*.

Paso 1:

Notación y valores de los parámetros constantes en una escala adimensional referenciados a $\omega_{TO} = 1.0$:

- ei=10.6; (el valor de la permitividad dieléctrica a altas frecuencias)
- e1=8.4; (valor de ϵ_1)
- kp=100.0; (el valor de $k_{//}$)
- t=135.0; ($\gamma_{TO} = 1/t$ es la constante de amortiguamiento del modo óptico transversal TO)
- te=336;
- d=0.0018; (ancho del pozo cuántico)
- w=wi=0.85; (frecuencia de la radiación incidente)
- w1=1.08; (frecuencia del modo óptico longitudinal LO, es decir, ω_{LO})
- wc=0.037; (la frecuencia ciclotrónica)
- wf=0.95; (la frecuencia)
- a=0.00016;
- $b = \frac{0.93}{wc}$;
- z=0.001;
- $dw = \frac{wf - wi}{1000}$;

Paso 2:

Parte real de la función permitividad ϵ_2 en función de la frecuencia de la onda incidente ω , es decir,

$$\epsilon_2(\omega) = \epsilon_\infty \frac{\omega^2 - \omega_{LO}^2}{\omega(\omega + i\gamma_{TO}) - \omega_{TO}^2};$$

$$e2[w_]:=ei*((w*w-w1*w1)/(w*w-1.0));$$

La expresión para programar la función permitividad compleja ϵ_2 es

$$e2[w_]:=ei*((w*w-w1*w1)/(w*(w+I/t)-1.0));$$

Sea la función

$$\kappa_1(\omega, k_{//}) = \sqrt{k_{//}^2 - \varepsilon_1 \omega^2}$$

$$k1[w_, kp_] := \text{Sqrt}[kp * kp - w * w * e1];$$

Sea la función

$$\kappa_2(\omega, k_{//}) = \sqrt{k_{//}^2 - \omega^2 \varepsilon_2(\omega)}$$

$$k2[w_, kp_] := \text{Sqrt}[kp * kp - w * w * e2[w]];$$

Sea la función

$$s_1(\omega, k_{//}) = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{k_{//}^2 - \varepsilon_1 \omega^2}} + \frac{\varepsilon_\infty \frac{\omega - \omega_{LO}}{\omega(\omega + i\gamma_{TO}) - \omega_{TO}^2}}{\sqrt{k_{//}^2 - \omega^2 \varepsilon_2(\omega)}}$$

$$s1[w_, kp] := e1/k1[w, kp] + e2/k2[w, kp];$$

Sea la función

$$s_2(\omega, k_{//}) = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{k_{//}^2 - \varepsilon_1 \omega^2}} - \frac{\varepsilon_\infty \frac{\omega^2 - \omega_{LO}^2}{\omega(\omega + i\gamma_{TO}) - \omega_{TO}^2}}{\sqrt{k_{//}^2 - \omega^2 \varepsilon_2(\omega)}}$$

$$s2[w_, kp] := e1/k1[w, kp] - e2/k2[w, kp];$$

Sea la función

$$p_1(\omega, k_{//}) = \sqrt{k_{//}^2 - \varepsilon_1 \omega^2} + \sqrt{k_{//}^2 - \omega^2 \varepsilon_2(\omega)}$$

$$p1[w_, kp] := k1[w, kp] + k2[w, kp];$$

Sea la función

$$p_2(\omega, k_{//}) = \sqrt{k_{//}^2 - \varepsilon_1 \omega^2} - \sqrt{k_{//}^2 - \omega^2 \varepsilon_2(\omega)}$$

$$p2[w_, kp] := k1[w, kp] - k2[w, kp];$$

Paso 3:

Definición de la función $f(k_{//}) = \omega_{LO}^2 + \frac{k_{//}^2}{\varepsilon_\infty}$ y su respectiva programación:

$$f[kp_] := ((w1 * w1 + kp * kp) / ei);$$

Sea la función $f_1(k_{//}) = th(\frac{k_{//} d}{2})$; $f1[kp_] := \text{Tanh}[kp * d / 2];$

Sea la función $f_2(k_{//}) = \coth\left(\frac{k_{//} d}{2}\right)$; $f2[kp_] := \text{Coth}[kp * d/2]$;

Sea la función $b_1(k_{//}, b) = (b \omega_c)^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_\infty \omega_{LO}^2 \text{th}\left(\frac{k_{//} d}{2}\right) + 2 a k_{//}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_\infty \text{th}\left(\frac{k_{//} d}{2}\right)}$;

$$b1[kp_b] := (wc * b)^2 + (e1 + ei * w1^2 * f1[kp] + 2 * a * kp) / (e1 + ei * f1[kp]);$$

Sea la función $c_1(k_{//}, b) = (b \omega_c)^2 \left[\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_\infty \omega_{LO}^2 \text{th}\left(\frac{k_{//} d}{2}\right) + 2 a k_{//}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_\infty \text{th}\left(\frac{k_{//} d}{2}\right)} \right]$;

$$c1[kp_b] := (wc * b)^2 * ((e1 + ei * w1^2 * f1[kp] + 2 * a * kp) / (e1 + ei * f1[kp]));$$

Sea la función $b_2(k_{//}, b) = (b \omega_c)^2 + \left[\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_\infty \omega_{LO}^2 \coth\left(\frac{k_{//} d}{2}\right) + 2 a k_{//}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_\infty \coth\left(\frac{k_{//} d}{2}\right)} \right]$;

$$b2[kp_b] := (wc * b)^2 + (e1 + ei * w1^2 * f2[kp] + 2 * a * kp) / (e1 + ei * f2[kp]);$$

Sea la función $c_2(k_{//}, b) = (b \omega_c)^2 \left[\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_\infty \omega_{LO}^2 \coth\left(\frac{k_{//} d}{2}\right) + 2 a k_{//}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_\infty \coth\left(\frac{k_{//} d}{2}\right)} \right]$;

$$c2[kp_b] := (wc * b)^2 * ((e1 + ei * w1^2 * f2[kp] + 2 * a * kp) / (e1 + ei * f2[kp]));$$

Sea la función $wf1(k_{//}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\omega_{LO}^2 + \frac{k_{//}^2}{\varepsilon_\infty} - \sqrt{\left(\omega_{LO}^2 + \frac{k_{//}^2}{\varepsilon_\infty} \right)^2 - \frac{4 k_{//}^2}{\varepsilon_\infty}} \right)}$;

$$wf1[kp_] := \text{Sqrt}[0.5 * (f[kp] - \text{Sqrt}[(f[kp]^2 - 4 * kp * kp / ei)])];$$

Sea la función $wf2(k_{//}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\omega_{LO}^2 + \frac{k_{//}^2}{\varepsilon_{\infty}} + \sqrt{\left(\omega_{LO}^2 + \frac{k_{//}^2}{\varepsilon_{\infty}} \right)^2 - \frac{4k_{//}^2}{\varepsilon_{\infty}}} \right)}$;

$$wf2[kp_] := \text{Sqrt}[0.5 * (f[kp] + \text{Sqrt}[(f[kp]^2 - 4 * kp * kp / ei)])];$$

Sea la función

$$wp1(k_{//}, b) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(b \omega_c)^2 + C \right] - \sqrt{\left[(b \omega_c)^2 + C \right]^2 - A}}$$

donde

$$C = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_{\infty} \omega_{LO}^2 \text{th}\left(\frac{k_{//} d}{2}\right) + 2 a k_{//}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_{\infty} \text{th}\left(\frac{k_{//} d}{2}\right)}$$

$$A = 4(b \omega_c)^2 C$$

$$wp1[kp_ , b_] := \text{Sqrt}[0.5 * (b1[kp, b] - \text{Sqrt}[b1[kp, b]^2 - 4 * c1[kp, b]])];$$

Sea la función

$$wp2(k_{//}, b) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(b \omega_c)^2 + C \right] + \sqrt{\left[(b \omega_c)^2 + C \right]^2 - A}}$$

$$wp2[kp_ , b_] := \text{Sqrt}[0.5 * (b1[kp, b] + \text{Sqrt}[b1[kp, b]^2 - 4 * c1[kp, b]])];$$

Sea la función

$$wp3(k_{//}, b) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(b \omega_c)^2 + D \right] - \sqrt{\left[(b \omega_c)^2 + D \right]^2 - B}}$$

donde

$$D = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_{\infty} \omega_{LO}^2 \coth\left(\frac{k_{//} d}{2}\right) + 2 a k_{//}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_{\infty} \coth\left(\frac{k_{//} d}{2}\right)}$$

$$B = 4(b \omega_c)^2 D$$

$$wp3[kp_ , b_] := \text{Sqrt}[0.5 * (b2[kp, b] - \text{Sqrt}[b2[kp, b]^2 - 4 * c2[kp, b]])];$$

Sea la función

$$wp4(k_{//}, b) = \sqrt{\frac{1}{2}[(b\omega_c)^2 + D] + \sqrt{[(b\omega_c)^2 + D]^2 - B}}$$

$$wp4[kp_ , b_] := \text{Sqrt}[0.5 * (b2[kp, b] - \text{Sqrt}[b2[kp, b]^2 - 4 * c2[kp, b]])];$$

Determinar el valor de la expresión

$$\sqrt{\epsilon_1 + \sqrt{\frac{\omega_{LO} * \epsilon_\infty}{\epsilon_1 + \epsilon_\infty}}}$$

$$\text{Sqrt}[(e1 + \text{Sqrt}[w1] * ei) / (e1 + ei)];$$

Paso 4:

Gráficas de la ley de dispersión

$$b = 0.93/wc$$

$$\text{Plot}[\{wp1[kp, b], wp2[kp, b], wp3[kp, b], wp4[kp, b]\}, \{kp, 0, 1000\}]$$

Programación de la matriz Δ en el programa Fortran

Det[M = { {f1, f2, fh, fh},

{f2*e, f1/e, fh*e, fh/e},

{gh, gh, g1, g2},

{gh*e, gh/e, g2*e, g1/e} }]

$$(f1^2 g1^2)/e^2 - f2^2 g1^2 - f1^2 g2^2 + e^2 f2^2 g2^2 - 2 f1 fh g1 gh - (2 f1 fh g1 gh)/e^2 + 4 f2 fh g1 gh + 4 f1 fh g2 gh - f2 fh g2 gh - 2 e^2 f2 fh g2 gh - 2 fh^2 gh^2 + (fh^2 gh^2)/e^2 + e^2 fh^2 gh^2$$

Simplify[%]

$$1/e^2 (f1^2 (g1^2 - e^2 g2^2) - 2 f1 fh (g1 + e^2 g1 - 2 e^2 g2) gh + fh^2 gh^2 + e^4 (f2 g2 - fh gh)^2 - e^2 (f2^2 g1^2 + 2 f2 fh (-2 g1 + g2) gh + 2 fh^2 gh^2))$$

FortranForm[%]

$$(f1**2*(g1**2 - e**2*g2**2) - 2*f1*fh*(g1 + e**2*g1 - 2*e**2*g2)*gh + fh**2*gh**2 +$$

$$- e^{**4}*(f2**g2 - fh*gh)**2 - e^{**2}*(f2**2*g1**2 + 2*f2*fh*(-2*g1 + g2)*gh + 2*fh**2*gh**2))/$$

$$- e^{**2}$$

$$\text{Det}[M1 = \{-f1/e, f2, fh, fh\},$$

$$\{-f1*ez)/e, f1/e, fh*e, fh/e\},$$

$$\{gh/ez, gh, g1, g2\},$$

$$\{(gh*ez)/e, gh/e, g2*e, g1/e\}]$$

$$-((f1^2 g1^2)/e^3) + (ez f1 f2 g1^2)/e^2 + (f1^2 g2^2)/e - ez f1 f2 g2^2 + (f1 fh g1 gh)/e^3 + (f1 fh g1 gh)/e - (f1 fh g1 gh)/(e^2 ez) - (3 ez f1 fh g1 gh)/e^2 + (f2 fh g1 gh)/ez + (ez f2 fh g1 gh)/e^2 - (2 f1 fh g2 gh)/e + (f1 fh g2 gh)/ez + ez f1 fh g2 gh + (2 ez f1 fh g2 gh)/e^2 - (f2 fh g2 gh)/ez - ez f2 fh g2 gh - (fh^2 gh^2)/ez + (fh^2 gh^2)/(e^2 ez) + ez fh^2 gh^2 - (ez fh^2 gh^2)/e^2$$

Simplify[%]

$$1/(e^3 ez) (ez f1 (f1 (-g1^2 + e^2 g2^2) + fh (g1 + e^2 g1 - 2 e^2 g2) gh) + e fh gh (f1 (-g1 + e^2 g2) + fh gh + e^2 (f2 g1 - f2 g2 - fh gh)) + e ez^2 (fh gh (f2 (g1 - e^2 g2) + (-1 + e^2) fh gh) + f1 (f2 (g1^2 - e^2 g2^2) + fh (-3 g1 + (2 + e^2) g2) gh)))$$

5.6 Gráficas de las relaciones de dispersión y el poder espectral

En la Figura 5.4 se muestra la potencia espectral (a) y las curvas de dispersión (b) para los modos que surgen en el sistema descrito para el caso $\omega_C = \omega_{LO} = 1.08 \omega_{TO}$. Se observa que en la región del espectro de grandes longitudes de onda, cuando los campos inducidos por las dinámicas del sistema electrónico están acoplados en $z = 0$ y $z = d$, se presentan dos conjuntos de modos el de baja frecuencia con velocidad de grupo negativa $\frac{\partial \omega}{\partial k_o} < 0$ y con la tendencia de acercarse hacia los fonones ópticos transversales TO a medida que crece la frecuencia, y el de alta frecuencia que aumenta con el vector de onda k_p por encima de la frecuencia de los fonones ópticos longitudinales LO.

Al incrementar k_p el acople entre los campos en las fronteras de los pozos se hacen marginales; en este caso, el conjunto de las bajas frecuencias se aproxima a ω_{TO} y el conjunto de las altas frecuencias adquiere valores que están muy por encima de la región reststrahlen del espectro considerado en Poulter *et al.* [4].

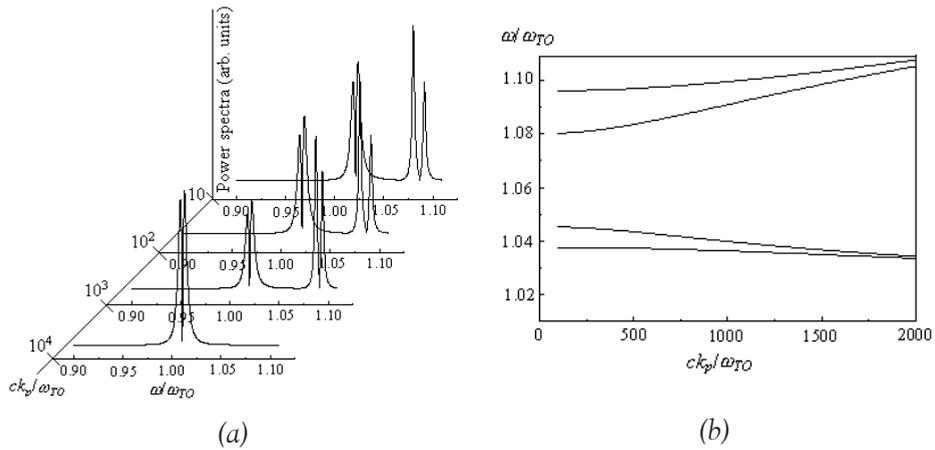


Figura 5.4.
 (a) gráfica de la potencia espectral, y (b) gráfica de las curvas de dispersión en el caso $\omega_C = \omega_{LO}$

En la Figura 5.5 se ilustra la región *reststrahlen* para el caso $\omega_C = 1.044\omega_{LO}$. En el límite de grandes longitudes de onda, el conjunto de altas frecuencias de los modos colectivos inician en frecuencia por debajo de ω_{TO} , y solamente para vectores de onda moderados ($k_O > 2 \times 10^3 \omega_{TO}/c$), la frecuencia del doblete se hace comparable con la de los modos *TO*. Por otro lado, el conjunto de baja frecuencia muestra un comportamiento cualitativo similar al que se observa en la Figura 5.4.

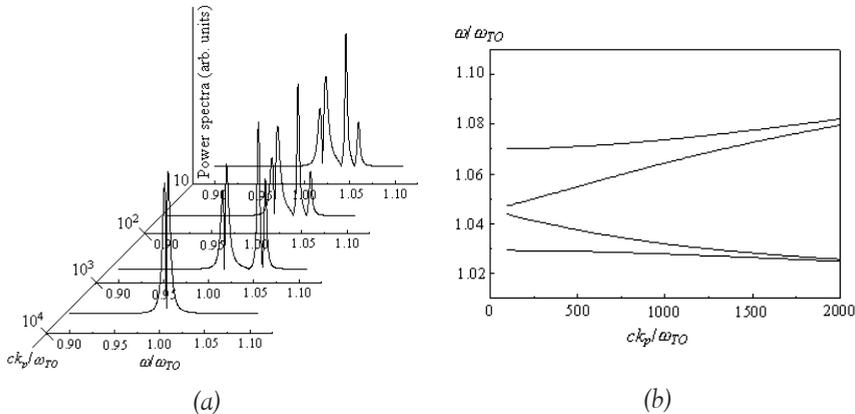


Figura 5.5.
 (a) gráfica de la potencia espectral, y (b) gráfica de las curvas de dispersión en el caso $\omega_C = 1.044\omega_{TO}$.

De este análisis se puede deducir que cuando las energías alcanzadas en la resonancia ciclotrónica cerca de la energía del fonón óptico longitudinal *LO*, no hay interacción entre los modos ciclotrón y fonón al ser despreciado el acople entre los

campos en las fronteras del pozo. En el caso límite de grandes longitudes de onda se observa que en $\omega_C = \omega_{LO}$ el modo TO presenta un desdoblamiento o doblete.

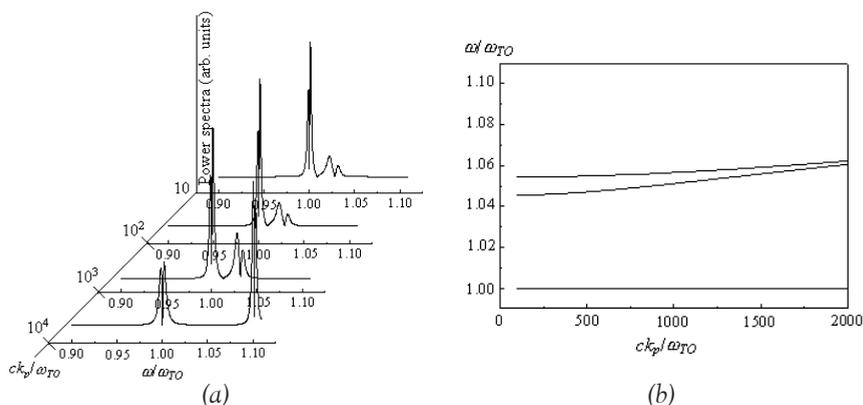


Figura 5.6.
(a) gráfica de la potencia espectral, y (b) gráfica de las curvas de dispersión en el caso $\omega_C = \omega_{TO}$.

En la Figura 5.6 se ilustra el caso de resonancia entre la frecuencia ciclotrónica y el modo óptico TO , es decir, $\omega_C = \omega_{TO}$. Aquí se observan dos modos que se incrementan muy lentamente por debajo de ω_{LO} con k_p y un pequeño desdoblamiento de la frecuencia TO para todos los valores del vector de onda. Esto está en correspondencia con los resultados experimentales reportados en Poulter *et al.* [4]. De esta forma, considerando un cálculo de la función de Green se ha comprendido el papel de los magneto-plasmones 2D sobre la absorción magneto infrarroja en pozos cuánticos con alta densidad electrónica, además de mostrar que la resonancia entre el modo LO y la frecuencia ciclotrónica puede presentar desdoblamiento en el modo LO en dos posibles frecuencias que están muy por encima de la *región reststrahlen*, si el acoplamiento entre los campos electromagnéticos en las fronteras se pueden despreciar. La resonancia con TO conduce a un pequeño desdoblamiento del modo óptico transversal, el cual toma lugar para todos los valores del vector de onda.

6. Influencia de los modos colectivos bidimensionales sobre la absorción infrarroja en un pozo cuántico de doble capa de $GaAs$ con alta densidad electrónica

Se desarrolla el formalismo de las funciones de Green y se discuten las condiciones que permiten las resonancias entre la frecuencia ciclotrónica ω_C y los modos TO y LO en la región del espectro, donde los efectos de retardo se toman en cuenta, en un pozo cuántico con una doble capa de electrones bidimensionales (2D). Se

muestra que para frecuencias ciclotrónicas en la región óptica retardada del espectro, las frecuencias iniciales de las oscilaciones en fase cercanas a ω_C presentan un corrimiento proporcional a la densidad de portadores y al campo aplicado [13].

6.1 Introducción

Hace una década, los efectos de retardo fueron observados en el espectro de los plasmones bidimensionales en electrones de alta movilidad en pozos cuánticos de *GaAs-AlGaAs* [14]. Esta observación inicial despierta el interés sobre el problema descrito arriba [15]. Dentro del límite no disipativo, la dependencia del campo magnético del espectro magneto-plasmónico, para el sistema ilimitado 2DEG, encuentra su intercepto con la línea de resonancia ciclotrónica, y a continuación, se aproxima a la frecuencia dada por la relación de dispersión de la luz. Los modos híbridos de ciclotrón-plasmón, que aparecen cuando se consideran los efectos de retardo, muestran una inusual dependencia de la frecuencia en el campo magnético. En los experimentos realizados, la medida de las frecuencias posibilitó omitir la dispersión de la permitividad dieléctrica, es decir, estaban lejos de la zona *reststrahlen*, donde los fonones ópticos juegan un papel importante.

La resonancia ciclotrónica en capas de carga espacial de electrones con alta densidad y alta movilidad en pozos cuánticos delgados de *GaAs*, con la geometría de Faraday en las frecuencias que cubren el régimen *reststrahlen*, se ha considerado experimentalmente por Poulter *et al.* [4, 5]. Se observó que en condiciones de resonancia, cuando la resonancia ciclotrónica alcanza energías cercanas a la del fonón óptico longitudinal, no hay interacción entre los modos ciclotrónico y fonónico. En cambio, se observa una interacción con un modo que tiene una energía cerca a la del fonón óptico transversal (*TO*). Los resultados fueron interpretados en referencia a un modelo apropiado solamente para sistemas volumétricos con un acoplamiento colectivo de los modos magneto-plasmón-fonón.

Recientemente se propuso el formalismo de la función de Green [1], con el fin de calcular las componentes del propagador fotónico en un sistema de doble capa de electrones en un pozo cuántico con alta densidad electrónica y la aplicación de un campo magnético transversal. Se examinan el poder espectral y la ley de dispersión del conjunto de modos colectivos no retardados que surgen en tales sistemas para frecuencias ciclotrónicas que se extienden en la región *reststrahlen* del espectro.

En un sistema de doble capa es posible la propagación de un plasmón acústico [16], correspondiente a las oscilaciones en fase entre las capas 2D. Este ítem tiene como objetivo discutir el carácter del acople de los modos magneto-plasmón-fonón cuando se toman en cuenta los efectos de retardo, con especial énfasis en el de las oscilaciones en fase, las cuales pueden surgir en el sistema considerado.

6.2 Modelo teórico

Siguiendo a Becerra y Granada [1], se considera un sistema de bicapas de gases de electrones bidimensionales (2D) con una concentración de portadores n_i localizados en las superficies $z = 0, d$. La función dieléctrica de tal sistema es

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_1 [\theta(-z) + \theta(z-d)] + \varepsilon_2(\omega) [\theta(z)\theta(d-z)] \quad (6.1)$$

con $\varepsilon_2(\omega) = \varepsilon_\infty \left(\frac{\omega^2 - \omega_{LO}^2}{\omega^2 - \omega_{TO}^2} \right)$ y ε_∞ es la permitividad dieléctrica a altas frecuencias

en el pozo $0 < z < d$; ω_{TO} y ω_{LO} son, respectivamente, los modos ópticos transversal (TO) y longitudinal (LO). La dinámica de tal sistema de electrones induce una densidad de corriente 2D

$$j_i(\vec{r}, t) = \sigma_{ij} [E_j(\vec{r}_{//}, 0, t)\delta(z) + E_j(\vec{r}_{//}, d, t)\delta(z-d)] \quad (6.2)$$

donde $\vec{r} = (\vec{r}_{//}, z)$, σ_{ij} son las componentes del tensor magnetoconductividad del gas de electrones 2D, y $E_j(\vec{r}_{//}, z, t)$ es el campo eléctrico en z . La ley de dispersión de los modos colectivos que surgen en el sistema considerado corresponde a las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_H & f_H \\ f_2 S^{-1} & f_1 S & f_H S^{-1} & f_H S \\ g_H & g_H & g_1 & g_2 \\ g_H S^{-1} & g_H S & g_2 S^{-1} & g_1 S \end{vmatrix} = 0, \quad (6.3)$$

donde $f_\pm = \frac{\varepsilon_1}{k_1} \pm \frac{\varepsilon_2}{k_2} + \frac{4\pi i \sigma_{xx}}{\omega}$, $g_\pm = \kappa_1 \pm \kappa_2 - \frac{4\pi i \sigma_{yy}}{c^2}$, $f_H = \frac{4\pi i \sigma_{xy}}{\omega}$,

$$g_H = \frac{4\pi i \sigma_{yx}}{c^2}, \quad \kappa_i = \sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon_2 \omega^2}{c^2}}, \quad S = \exp(\kappa_2 d), \quad i = 1, 2.$$

Se puede demostrar que la ecuación (6.3) se reduce a

$$\left(\frac{4\pi \sigma_{xy}}{c} \right)^2 + \left[\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} S \left(\frac{\kappa_2 d}{2} \right) + \frac{4\pi i \sigma_{xx}}{\omega} \right] + \left[\kappa_1 + \kappa_2 S \left(\frac{\kappa_2 d}{2} \right) - \frac{4\pi i \omega \sigma_{yy}}{c^2} \right] = 0, \quad (6.4)$$

donde $S(x) = \tanh(x)$ para oscilaciones en fase, y $S(x) = \coth(x)$ para oscilaciones en oposición de fase en las capas de electrones. Esta relación de dispersión contiene casos particulares de modos polaritónicos confinados en una capa de cristal iónico

en la región de no retardo del espectro ($\sigma_{ij} = 0$) [17], y de modos colectivos de no retardo de una lámina de doble capa [18].

6.3 Análisis de las gráficas

A continuación se discuten los resultados en la región *reststrahlen* para campos magnéticos correspondientes a las frecuencias ciclotrónicas dentro del rango $\omega_{TO} < \omega_C < \omega_{LO}$. Se usa el mismo conjunto de parámetros dados en la ecuación (5.12). La masa libre del electrón es m_o . Para frecuencias en la región considerada se pueden despreciar efectos no locales sobre el tensor magnetoconductividad y se puede usar la expresión de Drude para σ_{ij} .

Para oscilaciones en fase hay un modo que parte de la línea $k_l = 0$ con la frecuencia

$$\omega = \omega_c - 2 \frac{1}{\epsilon_\infty - \epsilon_1} \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_{TO}^2}{\omega_o^2 - \omega_c^2} \right) \left(\frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_c} \right), \quad (6.5)$$

la cual está por debajo de la frecuencia ciclotrónica ω_C . Debido al hecho de que para los ejemplos considerados por Poulter *et al.* [4] $\omega_{pl} < \omega_{TO}$, el cambio $\delta\omega/\omega_{TO}$ de la frecuencia inicial es relativamente pequeño. Los resultados para diferentes densidades de los portadores en las capas 2D se ilustran en la Figura 6.1a. Nótese que para $\omega_C = \omega_{TO}$ el cambio $\delta\omega/\omega_{TO}$ es cero, es decir, la frecuencia a la que el modo colectivo comienza es exactamente ω_C . Esto significa que el magneto-plasmón se fija por el modo óptico transversal, como se observó en el estudio de Poulter *et al* [4]. La frecuencia del modo descrito crece con k , hasta alcanzar ω_C . Los resultados para el caso especial de resonancia entre la frecuencia ciclotrónica y la del fonón óptico longitudinal se ilustran en la Figura 6.1b.

Adicionalmente, hay un segundo modo de oscilaciones en fase que parten de la línea $k_l = 0$ con una frecuencia

$$\omega = \omega_o + 2 \frac{1}{\epsilon_\infty - \epsilon_1} \left(\frac{\omega_o^2 - \omega_{TO}^2}{\omega_o^2 - \omega_c^2} \right) \left(\frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_o} \right), \quad (6.6)$$

$$\text{donde } \omega_o^2 = \frac{\epsilon_o - \epsilon_1}{\epsilon_\infty - \epsilon_1} \omega_{TO}^2.$$

Este modo aumenta linealmente con k y su relación de dispersión corresponde a la de una onda electromagnética propagándose en un medio ilimitado con permitividad ϵ_1 . Esta frecuencia está por encima de la del modo óptico longitudinal. Para oscilaciones en oposición de fase, la frecuencia inicial está dada por

$$\omega = \omega_c \left[1 - \left(\frac{\omega_{pl} d}{c} \right)^2 \right] \approx \omega_c, \quad (6.7)$$

es decir, el cambio de la frecuencia ciclotrónica de los magneto-plasmones en oposición de fase es despreciable en la región de retardo del espectro.

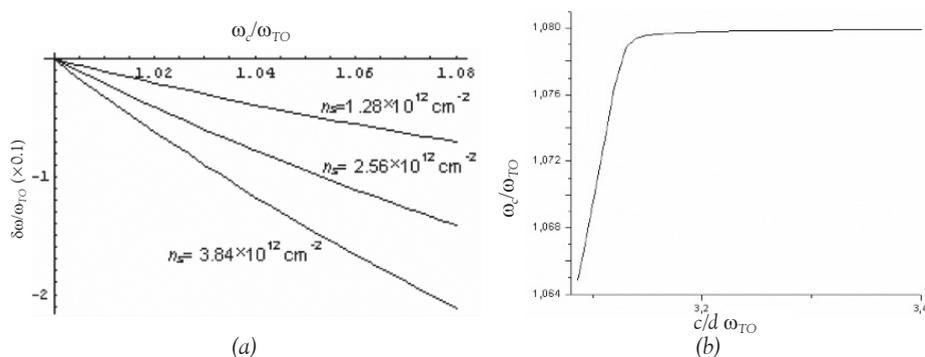


Figura 6.1

Comportamiento de los modos en la región reststrahlen para campos magnéticos correspondientes a las frecuencias ciclotrónicas: (a) para diferentes densidades de portadores en las capas 2D; (b) caso especial de resonancia entre la frecuencia ciclotrónica y la del fonón óptico longitudinal.

El comportamiento de los modos en la región de no retardo del espectro, con especial énfasis cuando se cumple la condición $k d \gg 1$, es descrita por Becerra y Granada [1]. Se observa que para campos magnéticos aplicados de tal forma que la frecuencia ciclotrónica del electrón se encuentra en la región de retardo *reststrahlen* del espectro, las frecuencias iniciales de las oscilaciones en fase cerca de ω_c experimentan un cambio del orden $(\omega_c^2 \omega_{TO}^2) \omega_{pl}^2 / 2 \omega_c$ que da cuenta del hecho de fijar la frecuencia ciclotrónica a la frecuencia del fonón óptico transversal. Los resultados de este trabajo se extienden a casos de mayor dificultad a los modos magneto-plasmón-fonón acoplados en un campo magnético paralelo, donde las bandas adicionales de plasmones no amortiguados han sido pronosticadas en pozos cuánticos con modos de plasma de dos capas inducidos en un solo pozo cuántico por campos magnéticos en el plano [16].

Unidad V
Cristales fotónicos

En los años ochenta surgió la idea de diseñar y construir materiales artificiales, llamados cristales fotónicos, que permiten controlar sus propiedades ópticas al modular espacialmente su índice de refracción. Los cristales fotónicos representan una nueva clase de materiales ópticos artificiales. En particular, estos materiales prohíben la propagación de la luz en ciertas direcciones y con determinadas frecuencias, y posibilitan la localización de la luz en áreas específicas [1]. En los últimos años, estos sistemas han suscitado considerable interés debido a que no solo muestran propiedades fundamentales, sino potenciales aplicaciones en la fotónica moderna [2]. El cristal fotónico está formado por una red de materiales alternados y macroscópicos, como, por ejemplo, dieléctricos, conductores, superconductores y metamateriales, que dan origen al potencial periódico fotónico (PBG). Si la constante dieléctrica de los materiales en el cristal es suficientemente diferente, y la absorción de la luz por el material es mínima, entonces la dispersión en las interfases puede producir muchos de los mismos fenómenos para fotones, así como el potencial periódico atómico lo hace para los electrones. Las bandas fotónicas prohibidas no permiten la propagación de determinadas ondas electromagnéticas en ciertas direcciones con energías bien definidas. En el caso de que para algún rango de frecuencias, un cristal fotónico refleje la luz incidente de cierta polarización con cualquier ángulo, se dice que el cristal tiene una banda prohibida fotónica completa. En dicho cristal, ninguno de los modos de luz puede propagarse si tienen una frecuencia dentro de este rango. Se puede construir un cristal fotónico de una geometría dada con dimensiones de milímetros para un control de microondas, o con dimensiones de micras para un control infrarrojo. Se construyen cristales fotónicos uni-, bi- y tridimensionales, pero el rasgo característico es la periodicidad de las permitividades dieléctricas ϵ y permeabilidades magnéticas μ . En la óptica, las estructuras periódicas deben ser

fabricadas artificialmente para poder manipular las propiedades de dispersión de la luz, así como las propiedades de los electrones son controladas en los cristales.

Los últimos avances en la ciencia de los materiales están ligados a la física y la tecnología de los cristales fotónicos y metamateriales. La característica de los dispositivos de cristales fotónicos aplicados en circuitos integrados se basa, sobre todo, en el fuerte confinamiento de la luz causado por los efectos de la banda prohibida fotónica (PBG), ya que los cristales fotónicos también exhiben notables propiedades de dispersión en sus bandas de transmisión, lo cual abre la perspectiva de nuevas funcionalidades ópticas. Microcavidades, microguías, microláseres, luz lenta, supercolimación, superprismas y los efectos del índice de refracción negativo son algunos de los fenómenos fascinantes que motivan fuertemente a la comunidad.

En la presente unidad se estudian diversas configuraciones físicas de cristales fotónicos unidimensionales con materiales iónicos y superconductores. En general, se investigan la estructura de bandas y el poder espectral, junto con los modos localizados en una superficie de separación de dos medios o cuando se presentan defectos que rompen la simetría traslacional. En primer lugar, se discuten las oscilaciones colectivas en un sistema binario de barras de material iónico inmersas en un medio dieléctrico base.

7. Características de las excitaciones acopladas en cristales fotónicos cerca de la brecha polaritónica

Se examinan los modos presentes en un cristal fotónico consistente en un sistema binario, en el cual un conjunto de barras de cristal iónico está inmerso en un medio dieléctrico homogéneo. Se han encontrado modos que forman bandas de frecuencia permitidas separadas por brechas de frecuencias prohibidas, cuyo origen físico no está asociado a la simetría traslacional del sistema, sino a una brecha en el espectro de los polaritones volumétricos. Se discuten las condiciones para la aparición de modos localizados con frecuencias cercanas a las de los fonones ópticos transversal y longitudinal, y se describen las características de los modos homogéneos con frecuencias dentro de la brecha polaritónica [3].

7.1 Introducción

Considérese un medio compuesto de un material dieléctrico homogéneo, en el cual se incrustan barras conductoras o dieléctricas de espesor d_1 paralelas entre sí y con un espaciado uniforme d_2 (Figura 7.1). A este sistema físico, de periodicidad $a = d_1 + d_2$, se le denomina cristal fotónico cuando por él se propagan ondas electromagnéticas. La propiedad física más relevante de este sistema consiste en la variación periódica en el espacio de la permitividad dieléctrica, lo que lleva a

la aparición de bandas de energías admitidas separadas por brechas prohibidas. Si, además, la permitividad dieléctrica de uno de los materiales que conforma el cristal fotónico presenta fuerte dispersión temporal, como es el caso de un medio polar, surgen rangos adicionales de frecuencias prohibidas (gap de banda fotónica), no asociados a la periodicidad del sistema. Con la sustitución de materiales polaritónicos dentro de los cristales fotónicos se introduce una amplia gama de fenómenos físicos relacionados con las excitaciones colectivas del sistema. Algunos aspectos concernientes a la ley de dispersión de las ondas electromagnéticas con frecuencias cerca a la de los fonones ópticos transversales han sido descritos mediante diversas técnicas [4-7]. En esta unidad se concentra la atención en las excitaciones que surgen dentro de la brecha fotónica, y se presentan algunos de los resultados reportados por Skorobogatiy y Yang [2].

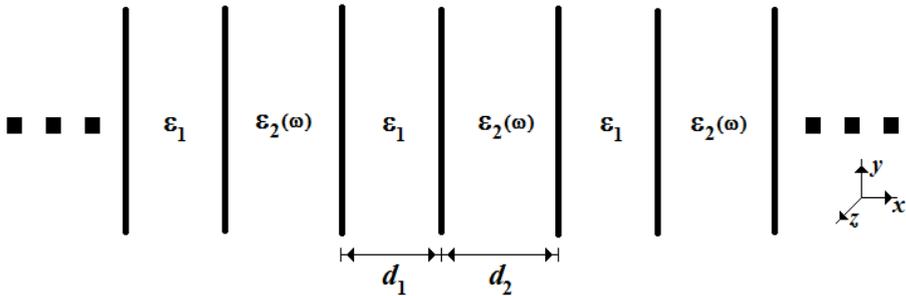


Figura 7.1
Cristal fotónico binario dieléctrico-material iónico.

7.2 Modelo teórico

Considérese un cristal fotónico que consiste en una distribución periódica a de varillas dieléctricas polares de sección cuadrada, de lado $d_2 < a$ y con permitividad dieléctrica ϵ_2 rodeadas por un medio dieléctrico con permitividad ϵ_1 . Se asume una onda electromagnética de frecuencia ω y un vector de onda \vec{k} que se propaga en la dirección \times (Figura 7.1). La permitividad dieléctrica de las varillas tiene la forma

$$\epsilon_2(\omega) = \epsilon_\infty \frac{\omega^2 - \omega_{LO}^2}{\omega^2 - \omega_{TO}^2},$$

donde $\omega_{LO}(\omega_{TO})$ es la frecuencia del fonón óptico longitudinal (transversal) y ϵ_∞ es la respuesta dieléctrica a altas frecuencias. Con base en el método descrito por Huang *et al.* [7] se obtiene la siguiente relación que permite hallar la dependencia de la frecuencia de los modos con el módulo del vector de propagación:

$$(1 + n^2) \sinh(\alpha_1 d_1) \sinh(\alpha_2 d_2) + 2n [\cosh(\alpha_1 d_1) \cosh(\alpha_2 d_2) - \cos(qd)] = 0, \quad (7.1)$$

donde $\alpha_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \epsilon_1}{c^2}}$; $\alpha_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \epsilon_2(\omega)}{c^2}}$; $n = \frac{\epsilon_2(\omega) \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_2}$; $d_2 = d - d_1$; $|qd| \leq \frac{\pi}{2}$

Para ondas homogéneas ($k=0$) la ley de dispersión toma la forma:

$$[1 + \epsilon_2(\omega)] \sin\left[\frac{\omega d_2}{c} \sqrt{\epsilon_2(\omega)}\right] \sin\left[\frac{\omega d_1}{c} \sqrt{\epsilon_1}\right] - 2 \sqrt{\frac{\epsilon_2(\omega)}{\epsilon_1}} \left\{ \cos\left[\frac{\omega d_2}{c} \sqrt{\epsilon_2(\omega)}\right] \cos\left[\frac{\omega d_1}{c} \sqrt{\epsilon_1}\right] - \cos(qd) \right\} = 0 \quad (7.2)$$

7.3 Análisis de las gráficas de la ley de dispersión

Para los cálculos numéricos se han tomado los siguientes valores de los parámetros relevantes:

$$\epsilon_\infty = 3.0, \quad \omega_{LO} = 0.32 \omega_d, \quad \omega_{TO} = 0.24 \omega_d, \quad \omega_d = \frac{2\pi c}{d}$$

Cerca de la frecuencia de los fonones ópticos transversales ω_{TO} , la permitividad dieléctrica del material polar es grande. Esto permite que el índice de refracción de las varillas sea mucho mayor que el índice de refracción del medio que las rodea, lo que acerca a 1 al coeficiente de reflexión normal en la frontera entre los medios 1 y 2.

De la relación (7.2) se deduce, entonces, la siguiente expresión para las frecuencias cercanas a ω_{TO} :

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_{LO}^2 + \Omega_m^2 - \sqrt{(\omega_{LO}^2 + \Omega_m^2)^2 - 4\omega_{TO}^2 \Omega_m^2} \right], \quad (7.3)$$

donde $\Omega_m = m \frac{\omega_d}{2\sqrt{\epsilon_\infty}}$.

Así, en el rango de frecuencias $0 < \omega < \omega_{TO}$ se encuentra, para un valor dado de qd , un modo cuya frecuencia está separada de la frecuencia de los fonones ópticos transversales y una serie de modos con dispersión débil cuyas frecuencias se localizan cerca de ω_{TO} tal como se ilustra en la Figura 7.2. Este resultado fue obtenido por Huang et al. [7], con base en un hamiltoniano de tipo enlace fuerte.

Las frecuencias de los modos cuyas frecuencias corresponden a la brecha polaritónica, donde $\omega_{TO} < \omega < \omega_{LO}$, satisfacen la relación

$$\begin{aligned} & \left[1 - |\epsilon_2(\omega)| \right] \operatorname{sen} \left[\frac{\omega d_1}{c} \sqrt{\epsilon_1} \right] \operatorname{senh} \left[\frac{\omega d_2}{c} \sqrt{|\epsilon_2(\omega)|} \right] - \\ & 2 \left(\frac{|\epsilon_2(\omega)|}{\epsilon_1} \right)^{1/2} \left\{ \cos \left[\frac{\omega d_1}{c} \sqrt{\epsilon_1} \right] \operatorname{cosh} \left[\frac{\omega d_2}{c} \sqrt{|\epsilon_2(\omega)|} \right] - \cos(qd) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

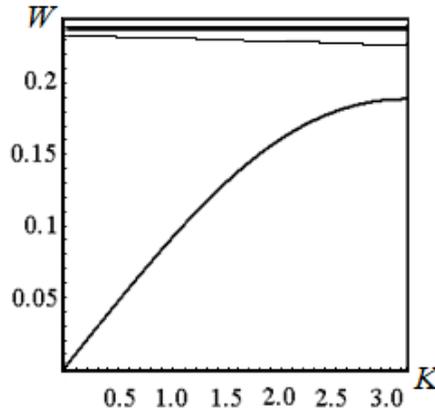


Figura 7.2.

Ley de dispersión W versus K , donde $W = \omega d / (2\pi c)$ y $K = q d$.

En la Figura 7.3 se representan varias curvas de dispersión con frecuencias dentro de la brecha polaritónica para varios anchos del parámetro d_1 . Nótese que para bajos valores de qd al aumentar el ancho característico $d_2 = d - d_1$, de la región ocupada por una barra polar en la celda unitaria, la frecuencia del modo tiende a localizarse encima de la frecuencia de los fonones ópticos transversales, mientras que al disminuir, la respectiva frecuencia tiende a localizarse cerca de ω_{LO} . Al crecer qd , todas las curvas de dispersión se cortan en un mismo punto, independientemente de los valores de los parámetros ω_{TO} , ω_{LO} , d_1 y d_2 . La magnitud de esta frecuencia está dada por

$$\omega_{transp} = \sqrt{\frac{\epsilon_o - \epsilon_1}{\epsilon_\infty - \epsilon_1}} \omega_{TO}, \text{ donde } \epsilon_o = \left(\frac{\omega_{LO}}{\omega_{TO}} \right)^2 \epsilon_\infty \quad (7.5)$$

La frecuencia dada en la ecuación (7.5) corresponde a la frecuencia de transparencia en la cual se cruzan las curvas de dispersión de los fotones en el medio 1, con permitividad ϵ_1 y los polaritones en el medio 2, con permitividad $\epsilon_2(\omega)$; es decir, cuando $\epsilon_1 = \epsilon_2(\omega)$. Para los modos con frecuencias cercanas a la frecuencia de los fonones ópticos longitudinales, la relación de dispersión se simplifica considerablemente y toma la forma

$$q(\omega_{LO}) = \arccos \left[\cos \left(\frac{\omega_{LO} d_1}{c} \right) - \frac{\omega_{LO} d_2}{2c} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_{LO} d_1}{c} \right) \right] \quad (7.6)$$

Los posibles valores que puede tomar qd en función de la frecuencia ω_{LO} se ilustran en la Figura 7.4 para diferentes valores del parámetro d_1 . Para un valor dado de d_1 al variar ω_{LO} se encuentra una región de frecuencias de fonones ópticos

longitudinales para las cuales no es posible hallar modos localizados en la brecha polaritónica. En otras palabras, hay una banda en la brecha polaritónica que se extiende a través de la primera zona de Brillouin. Al aumentar d_1 el ancho de la región prohibida disminuye, y para todo valor de ω_{LO} es posible hallar un qd real dentro de la primera zona de Brillouin.

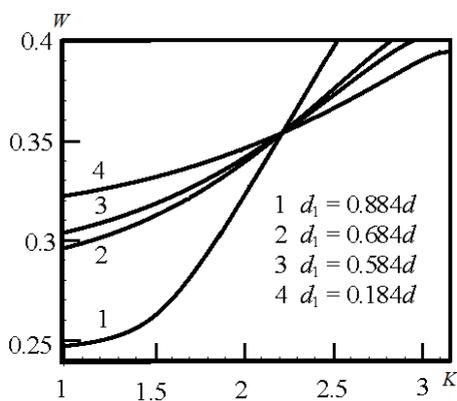


Figura 7.3

Ley de dispersión W versus K para diferentes espesores de la capa d_1 .

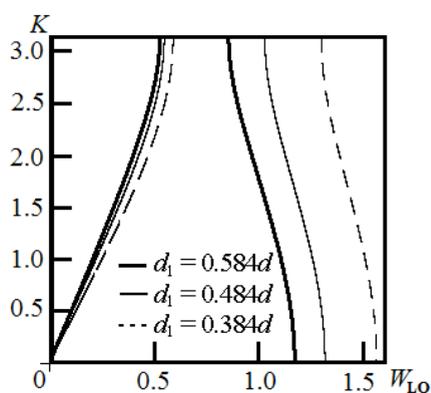


Figura 7.4

Dependencia de posibles valores que puede tomar $K = qd$ en función de la frecuencia $W_{LO} = \omega_{LO} d / (2\pi c)$.

De esta forma, al describir los modos que surgen en un cristal fotónico constituido por un arreglo periódico de varillas dieléctricas polares, se han encontrado modos que forman bandas de frecuencia permitidas separadas por brechas de frecuencias prohibidas, cuyo origen físico no está asociado a la simetría traslacional del sistema, sino a la existencia de una brecha en el espectro de los polaritones volumétricos. Se ha mostrado que existe una banda de modos con frecuencias localizadas por debajo de la frecuencia de los fonones ópticos transversales; además, que es posible la aparición de modos homogéneos con frecuencias en la brecha polaritónica. Los resultados obtenidos no solo pueden ser generalizados a geometrías diferentes, sino incluir efectos asociados a la presencia de materiales polares con parámetros diferentes que rompan la simetría de traslación del sistema.

8. Modos colectivos en un cristal fotónico dieléctrico-superconductor

Con base en la teoría de la respuesta lineal, se calculan las componentes del propagador electromagnético de un sistema periódico unidimensional no magnético, que consiste en capas alternadas de superconductor-dieléctrico de diferentes espesores. Se discute la estructura de la banda fotónica y el correspondiente poder espectral

a partir de los polos y la parte imaginaria del propagador electromagnético. Se muestra que, para un determinado periodo de la red, el número de bandas en un rango de frecuencias fijo disminuye y las respectivas bandas permitidas presentan una dependencia más fuerte con respecto al cuasivector de onda, a medida que la capa superconductora ocupa un mayor porcentaje de la celda unitaria del cristal fotónico. Adicionalmente, a medida que la longitud de penetración de London decrece, las bandas son cada vez menos dispersivas, lo cual es una clara indicación del papel que desempeñan las capas superconductoras en el acoplamiento de las celdas unitarias vecinas [8].

8.1 Introducción

Durante los últimos años, una explosión de la investigación en el diseño y fabricación de los cristales fotónicos [9] ha inspirado una gran cantidad de potenciales aplicaciones en las telecomunicaciones, incluyendo guías de onda, filtros de canales en caída y reflectores omnidireccionales [10-12]. En particular, se consideran los modos que surgen en un cristal fotónico formado con varillas polares inmersas en un medio dieléctrico homogéneo [13]. En este caso, hay bandas de frecuencias permitidas separadas por bandas prohibidas o gap, que no están ligadas a la simetría traslacional del sistema, sino a la existencia de un gap en el espectro de los polaritones volumétricos, lo cual conduce a la excitación de modos homogéneos con frecuencias en la brecha polaritónica [12]. Se observa una situación similar en los cristales fotónicos que contienen placas superconductoras [13]; en ellas existe una brecha de plasma de baja frecuencia asociada a la densidad no nula de los portadores superconductores, y se predice la existencia de un modo híbrido fotón-superelectrón alrededor del gap polaritónico. Además, hay bandas prohibidas para la propagación de las ondas electromagnéticas en cristales fotónicos con arreglos de vórtices Abrikosov en redes triangulares bidimensionales. En el trabajo reciente de Wu, Chen y Yang [14] se calculó el espectro de transmitancia y la estructura de banda fotónica del cristal fotónico con capas alternadas superconductor-dieléctrico, acentuando en la dependencia de la frecuencia de corte como una función de la constante dieléctrica base. A continuación se estudia el comportamiento de las bandas admitidas y prohibidas cuando, en una celda unitaria dada, cambia la relación entre los espesores de los materiales.

8.2 Modelo y relaciones generales

Se considera una estructura multicapa periódica dieléctrica-superconductor con un infinito número de periodos. La celda unitaria de espesor d consiste de una capa superconductora de espesor d_1 (con permitividad dieléctrica relativa ϵ_1 definida a continuación) y una capa dieléctrica de espesor d_2 (con permitividad dieléctrica relativa ϵ_2). Si la onda TE con frecuencia ω se propaga en tal sistema, el material

superconductor puede ser caracterizado con la permitividad dieléctrica relativa de la forma

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \left(\frac{c}{\omega \lambda_L} \right)^2,$$

donde

$$\lambda_L(T) = \lambda_o \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{1/2}, \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{m c^2}{4 \pi n e^2}}$$

y n es la densidad de portadores en el semiconductor. Sobre la base de la teoría de la respuesta lineal se calculan las componentes del propagador electromagnético del cristal fotónico descrito. Las componentes de Fourier del tensor de Green fotónico satisface el conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \kappa^{-2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d z^2 - \kappa^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{xk}(z, z') \\ g_{yk}(z, z') \end{pmatrix} = 4 \pi \begin{pmatrix} c^2 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{xk} + \delta_{yk} \end{pmatrix} \delta(z - z') \quad (8.1)$$

donde $\kappa = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(z)}$. En la frontera, la continuidad de g_{ik} toma lugar $\frac{\varepsilon}{\kappa^2} \frac{d g_{xk}}{d z}$ y $d g_{yk} / d z$. Sobre la base de la consideración de la simetría traslacional, las soluciones de (8.1) para las ondas con polarización- p y para $0 < z, z' < d$ son

$$g_{xx}^I(z, z') = \frac{2 \pi c^2}{\varepsilon_1 \kappa_2 \omega^2 \Delta} (\alpha_{xx} e^{\kappa_1 z} + \beta_{xx} e^{-\kappa_1 z}) \quad (8.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} = & \left[\frac{1}{(\varepsilon_1 \kappa_2 - \varepsilon_2 \kappa_1)} \frac{e^{\kappa_2 d_2}}{e^{\kappa_2 d_2} - e^{\kappa_1 d_1} q} \right] sh(\kappa_1 z') + (1 - q e^{\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2}) \times \\ & \times \left\{ (\varepsilon_1 \kappa_2 - \varepsilon_2 \kappa_1)^2 sh(\kappa_1 z') - [(\varepsilon_1 \kappa_2)^2 - (\varepsilon_2 \kappa_1)^2] sh[\kappa_1 (d - z')] \right\} \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\beta_{xx} = -(\varepsilon_1 \kappa_2 + \varepsilon_2 \kappa_1) (1 - q e^{\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2}) sh(\kappa_1 z') + (\varepsilon_1 \kappa_2 - \varepsilon_2 \kappa_1) (1 - q e^{-(\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2)}) sh[\kappa_1 (d - z')] \quad (8.4)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) - ch(\kappa_1 d_1) ch(\kappa_2 d_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} \right) sh(\kappa_1 d_1) sh(\kappa_2 d_2)$$

donde $q = \exp(i k d)$, siendo k el cuasivector de onda. Las leyes de dispersión de los modos colectivos que surgen en el sistema considerado corresponden a las raíces de la ecuación $\Delta = 0$. La estructura de bandas y el correspondiente poder espectral se estudian desde los polos y la parte imaginaria del propagador electromagnético.

8.3 Ley de dispersión y poder espectral

Con el objeto de discutir los modos homogéneos que se plantean en el sistema descrito, se definen las cantidades adimensionales:

$$\Omega = \frac{\omega d}{2\pi c}; \quad \Lambda = \frac{d}{2\pi \lambda_L}; \quad K = \frac{k d}{2\pi}; \quad r = \frac{d_2}{d}$$

Para los cálculos numéricos se ha tomado el valor $\varepsilon_2 = 15$.

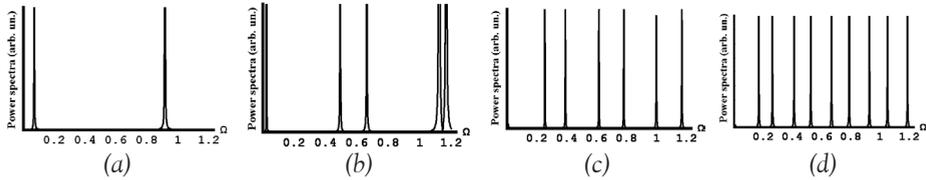


Figura 8.1

Poder espectral de los modos colectivos en un cristal fotónico dieléctrico-superconductor en el punto Γ ($k = 0$) para $\Lambda = 0.05$, $\varepsilon_2 = 15$ y para diferentes valores de $r = d_2/d$: (a) $r = 0$; (b) $r = 1/3$; (c) $r = 2/3$; (d) $r = 1$.

En la Figura 8.1 se ilustra el poder espectral de los modos colectivos que surgen en el sistema descrito en el centro de la zona de Brillouin, para los valores numéricos indicados en la leyenda de la figura. En el caso $r = 0$, el sistema consiste en un superconductor puro, y en el intervalo de la frecuencia, considerada el número de modos, es menor que en el caso $r = 1$ (cuando el sistema corresponde a un dieléctrico puro). Por lo tanto, para un periodo dado, así como la capa superconductor ocupa un mayor porcentaje de la celda unitaria del cristal fotónico, el número de bandas en un intervalo fijo de frecuencias disminuye.

En la Figura 8.2 se representa un conjunto de modos de dispersión que surgen en el cristal fotónico para un valor fijo de profundidad de penetración ($\Lambda = 0.05$), pero para diferentes valores de la relación entre el espesor del dieléctrico y el de la celda unitaria. Se observa que, para un periodo de red dado, el decrecimiento de la relación r implica, adicionalmente, que los intervalos de frecuencias restringidas disminuyen y las respectivas bandas permitidas presentan una fuerte dependencia con el cuasivector de onda q , como se observa en la Figura 8.2a.

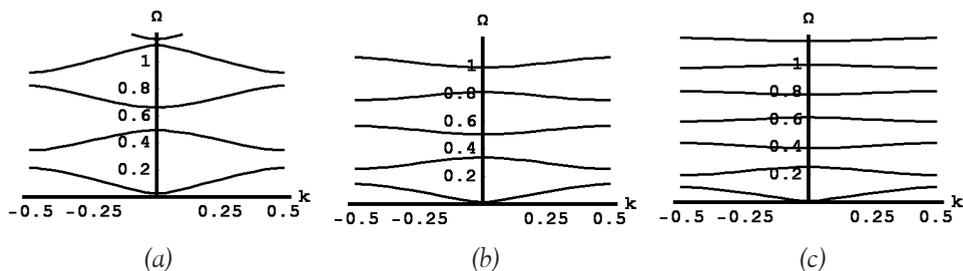


Figura 8.2

Modos de dispersión que surgen en el cristal fotónico para $\Lambda = 0.05$, $\varepsilon_2 = 15$ y para diferentes valores de la relación entre los espesores del dieléctrico y el de la celda unitaria: (a) $r = 1/3$; (b) $r = 1/2$; (c) $r = 2/3$.

En las Figura 8.3 se representa la dependencia de los modos de dispersión del parámetro superconductor Λ para $r = 2/3$ y Se observa que los modos de más baja frecuencia en el centro y en el borde de la zona de Brillouin muestran una dependencia muy pronunciada de la longitud de penetración de London. Esto indica que, así como la longitud de penetración de London decrece, las bandas de alta frecuencia se vuelven menos dispersivas, lo cual indica que el superconductor juega un papel significativo en el acoplamiento de las celdas unitarias vecinas, solamente para los modos de baja frecuencia.

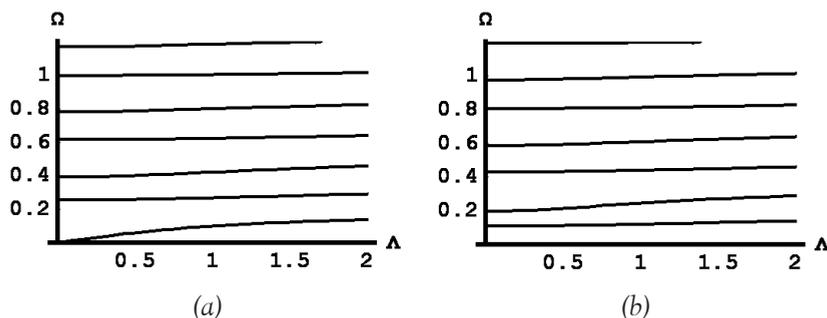


Figura 8.3

Dependencia del parámetro superconductor Λ de los modos de dispersión: (a) en el centro ($q = 0$) y (b) en el borde ($q = \pi$) de la zona de Brillouin para un cristal fotónico con $r = 2/3$, $\varepsilon_2 = 15$.

De esta forma, en el estudio del poder espectral y la estructura de bandas fotónicas de un cristal fotónico constituido por capas dieléctrico-superconductoras, se muestra que el número de bandas en un rango de frecuencias fija, la cual es sensible al ancho y la dispersión de los modos de baja frecuencia, se rige por la longitud de penetración de London. Estos resultados se pueden extender a los modos con polarización-s y relaciones de dispersión más complejas para el caso de los campos magnéticos aplicados. Adicionalmente, los cálculos de la estructura de bandas 2D

se pueden realizar con el objeto de estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en cristales fotónicos dieléctrico-superconductores 2D.

9. Estados fotónicos en estructuras semiinfinitas dieléctrico-superconductoras

Con base en la teoría de la respuesta lineal, se discuten las propiedades colectivas electromagnéticas de un cristal fotónico semiinfinito que contacta con el vacío. El cristal fotónico consiste en una serie alternada de capas dieléctrico-superconductoras de diferentes espesores. Se considera la estructura de la banda fotónica del sistema en bloque, además de los modos localizados que surgen debido al rompimiento de la simetría traslacional. Se demuestra que, a medida que aumenta la magnitud de la componente en el plano del vector de onda, la frecuencia del modo localizado más bajo crece, mientras que la del modo más alto decrece. Por otro lado, para un valor dado del vector de onda aparecen modos adicionales en la brecha de la banda, de tal forma que si la capa superconductora está en contacto con el vacío, hay un modo en la brecha superconductora para valores del vector de onda por encima de cierto valor crítico no nulo. Los resultados se ilustran con curvas de dispersión del sistema en bloque y para los modos localizados [15].

9.1 Introducción

Los cristales fotónicos [16] han inspirado durante los últimos años una gran cantidad de posibles aplicaciones en las telecomunicaciones (guía de ondas, filtros de canales en caída y reflectores omnidireccionales). Se ha dedicado especial atención a los modos que surgen en tales sistemas; para el caso de un cristal fotónico que consiste en un sistema binario de varillas polares inmersos en un medio dieléctrico homogéneo, se han considerado los modos colectivos [17]. En el caso particular del cristal fotónico que contiene capas superconductoras, una brecha de plasma de baja frecuencia existe asociada a la densidad no nula de los portadores del superconductor, y hay un modo híbrido superelectrón-fotón alrededor de la brecha polaritónica.

En artículos recientes de Becerra y Granada [3, 8] se demostró que, para un periodo de red dado, cuando la capa superconductora ocupa un mayor porcentaje de la celda unitaria del cristal fotónico, el número de bandas en un rango fijo de frecuencias disminuye, los intervalos de frecuencias prohibidas decrecen y las respectivas bandas permitidas presentan una fuerte dependencia con el cuasivector de onda. Además, así como la longitud de penetración de London decrece, las bandas se vuelven menos dispersivas, lo cual indica que las capas superconductoras son relevantes en el acoplamiento de las celdas unitarias próximas.

La mayoría de los cálculos en los cristales fotónicos asumen que el sistema es periódico. Sin embargo, el rompimiento de una simetría traslacional implica la posibilidad de la aparición de modos localizados con frecuencias dentro de la brecha prohibida, y los campos electromagnéticos decrecen exponencialmente desde la región donde se rompe dicha simetría. Por esta razón, en el trabajo de Becerra y Granada [15] se consideran las propiedades electromagnéticas colectivas de un cristal fotónico semiinfinito que está en contacto con el vacío. Las ondas superficiales que surgen en este caso se han propuesto como una forma de inyectar luz en una guía de onda fotónica.

9.2 Modelo teórico

El sistema en consideración es modelado como una estructura de multicapas dieléctrico-superconductor ($z > 0$) en contacto con un medio dieléctrico-semiinfinito ($z < 0$) con permitividad dieléctrica ϵ' . La celda unitaria de espesor d del sistema de multicapas consiste de una capa superconductor de espesor d_1 (con permitividad dieléctrica relativa ϵ_1 definida abajo) y una capa dieléctrica de espesor (con permitividad dieléctrica relativa ϵ_2). Las capas superconductoras pueden ser caracterizadas con una permitividad relativa de la forma

$$\epsilon_1(\omega) = 1 - \left(\frac{c}{\omega \lambda_L} \right)^2,$$

donde λ_L corresponde a la longitud de penetración de London, dependiente de la temperatura λ_L con la expresión

$$\lambda_L(T) = \lambda_o \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4}$$

y n es la densidad de los portadores del superconductor.

Para encontrar los estados en bloque (volumétrico) y superficiales, se deben resolver las ecuaciones de Maxwell con las condiciones de frontera y continuidad de las componentes tangenciales de la intensidad del campo eléctrico y magnético, además de asumir, por supuesto, el decaimiento de la amplitud de los campos correspondientes de la forma $\exp(-\alpha z)$.

Debido a la homogeneidad e isotropía del sistema en los planos de las capas, las soluciones se pueden considerar de la forma de ondas libres con frecuencias ω y vector de onda $\vec{k} = (k, 0, 0)$. Después de realizar ciertos cálculos, se obtienen las siguientes relaciones para los modos con polarización p :

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \cosh(\kappa_1 d_1) \cosh(\kappa_2 d_2) + \frac{1}{2} \left[\frac{\kappa_2 \epsilon_1}{\kappa_1 \epsilon_2} + \frac{\kappa_1 \epsilon_2}{\kappa_2 \epsilon_1} \right] \sinh(\kappa_1 d_1) \sinh(\kappa_2 d_2) \quad (9.1)$$

$$\frac{\varepsilon_2 \kappa_2 \left[(\kappa_1 \varepsilon')^2 - (\kappa' \varepsilon_1)^2 \right] - \kappa' \varepsilon' \left[(\kappa_1 \varepsilon_2)^2 - (\kappa_2 \varepsilon_1)^2 \right] \tanh(\kappa_1 d_1)}{\varepsilon_1 \kappa_1 \left[(\kappa' \varepsilon_2)^2 - (\kappa_2 \varepsilon')^2 \right] \tanh(\kappa_1 d_1)} = \coth(\kappa_2 d_2) \tag{9.2}$$

$$\frac{1}{x} = \cosh(\kappa_1 d_1) \cosh(\kappa_2 d_2) + \frac{\kappa' \varepsilon_2}{\kappa_2 \varepsilon'} \sinh(\kappa_1 d_1) \cosh(\kappa_2 d_2) +$$

$$\frac{\kappa_1 \varepsilon_2}{\kappa_2 \varepsilon_1} \sinh(\kappa_1 d_1) \sinh(\kappa_2 d_2) - \frac{\kappa_1 \varepsilon'}{\kappa' \varepsilon_1} \cosh(\kappa_1 d_1) \sinh(\kappa_2 d_2), \tag{9.3}$$

donde $\kappa(z) = \sqrt{k^2 - \varepsilon(z) \frac{\omega^2}{c^2}}$ y $x = \exp(-\alpha z)$. La localización de la excitación puede ser caracterizada por la magnitud física

9.3 Gráficas de la ley de dispersión

Para la descripción de los modos localizados que surgen en el cristal fotónico semiinfinito 1D, se introducen las cantidades adimensionales: $\Omega = \omega d / (2\pi c)$ y $\Lambda = d / (2\pi \lambda_1)$. Las bandas en bloque de este sistema para oscilaciones homogéneas ($k = 0$) se describen en el trabajo de Becerra y Granada [8]. Por medio del análisis numérico de la relación (9.2), se encuentra que en el cristal fotónico semiinfinito descrito arriba no se localizan modos homogéneos, debido al papel relevante que desempeñan los efectos de retardo. Por esta razón, en las Figuras 9.1a y 9.1b se describen las oscilaciones colectivas en la región del espectro de no retardo.

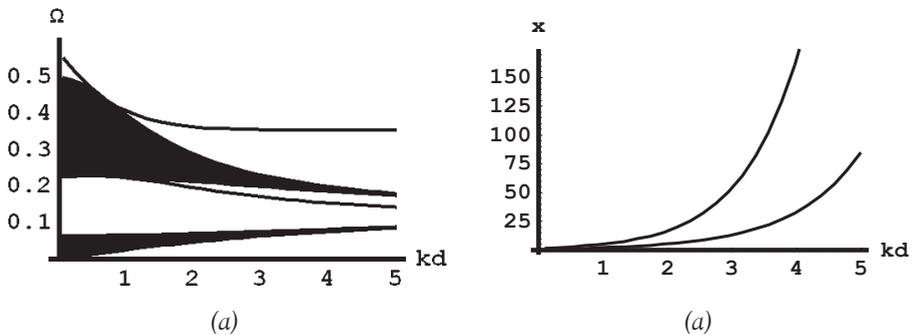


Figura 9.1

(a) Modos en bloque (región sombreada) y localizados (líneas continuas) surgen en un cristal fotónico semiinfinito dieléctrico-superconductor para el caso en que la capa superconductora está en contacto con el vacío; y (b) comportamiento del parámetro característico x . Los cálculos numéricos se realizaron para $\Lambda = 0.5$; $d_1 = 0.2d$; $d_2 = 1 - d_1$; $\varepsilon_2 = 15$.

El espectro de las oscilaciones colectivas en bloque consiste de una banda estrecha de baja frecuencia en el intervalo $0 < \omega < \omega_0$, donde $\omega_0 < 1/\lambda_L$; y una banda ancha

de alta frecuencia $\omega > 1/\lambda_L$, donde las bandas están separadas por una brecha prohibida. Estas bandas volumétricas se ilustran en las regiones sombreadas de las Figuras 9.1a y 9.2a. En la banda estrecha (y en la banda ancha, respectivamente), las frecuencias más bajas (más altas) están ligadas a las oscilaciones en fase de los campos electromagnéticos en las capas adyacentes (bordes de la minizona de Brillouin). Además, el centro de la minizona de Brillouin corresponde a las frecuencias más altas (más bajas) de la banda estrecha (más ancha).

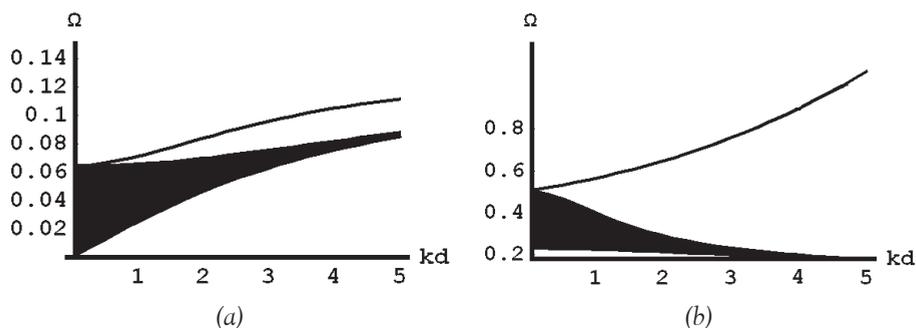


Figura 9.2

(a) Modos de baja frecuencia, y (b) modos de alta frecuencia, en el caso en que la capa dieléctrica está en contacto con el vacío.

En la Figura 9.1a se ilustran los modos localizados que surgen cuando se rompe la simetría traslacional en la capa superconductor. En este caso hay dos modos localizados cerca de la banda más ancha. La frecuencia del modo más bajo (más alto) se inicia en el centro (bordes) de la minizona de Brillouin de la banda más ancha del bloque. El comportamiento del correspondiente parámetro de localización x se muestra en la Figura 9.1b. Se observa que el modo se hace más localizado, en tanto que el vector de onda se incrementa.

En el caso en que la simetría traslacional se rompe en la capa dieléctrica, el modo de frecuencia más baja se inicia en el centro de la minizona de Brillouin de la banda más angosta, como se ilustra en la Figura 9.2a. Por otro lado, el comportamiento del modo de más alta frecuencia para grandes valores del vector de onda es cualitativamente similar, como se muestra en la Figura 9.1b. Esto significa que solo el carácter del modo de más baja frecuencia se afecta por el tipo de capa que rompe la simetría traslacional.

De esta forma, en la discusión de los modos localizados que surgen en un cristal fotónico dieléctrico-superconductor, se obtienen las relaciones generales que permiten describir la ley de dispersión de tales modos en la región del espectro de no retardo. Estos resultados pueden ser extendidos al considerar mecanismos adicionales de rompimiento de la condición de periodicidad, tales como la inclusión de múltiples capas o individuales defectuosas.

Bibliografía

Referencias unidad I

- [1] D. G. DUFFY, *Green's Functions with Applications*. United States of America: Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [2] E. N. ECONOMOU. *Green's Functions in Quantum Physics*, 3rd ed. Germany: Springer-Verlag, 2006.
- [3] E. N. ECONOMOU. *Green functions in quantum physics*. Springer, 1979.
- [4] L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ. *The classical theory of fields*. Addison-Wesley, 1971.
- [5] L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, Oxford, 1969.
- [6] G. D. MAHAN, *Many particle physics*. New York: Springer, 1981.

Referencias unidad II

- [1] A. A. MARADUDIN and D. L. MILLS. "Scattering and absorption of electromagnetic radiation by a semi-infinite medium in the presence of surface roughness", *Physical Review B*. vol. 11, no. 4, 1975.
- [2] A. A. ABRIKOSOV, L. P. GORKOV, and I. E. DZIALOSHINSKI. *Methods of quantum field theory in statistical physics*. Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1963. Sec. 28.

- [3] D. N. ZUBAREV. "Double-time Green Functions in statistical physics". *Usp. Fiz. Nauk*, 71, 71 *Sov. Phys. –Usp.* 3, 320. 129601960.
- [4] I. E. DZYALOSHINSKI and L. P. PITAYEVSKI, "Van der Waals Forces in an Inhomogeneous Dielectric" *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 36, 1797. *Sov. Phys. –JETP* 9, 12821959

Referencias unidad III

- [1] A. A. MARADUDIN y D. L. MILLS. "Scattering and absorption of electromagnetic radiation by a semi-infinite medium in the presence of surface roughness". *Physical Review B.*, vol. 11, no. 4, (1975).
- [2] J. I. POULTER and J. Zeman. *Magneto infra-red absorption in high electronic density GaAs quantum wells*. Berlin, Germany: Paul Drude Institute, (2000).
- [3] J. H. REINA-ESTUPIÑÁN and J. C. GRANADA, "in Surfaces, Vacuum and their applications", Eds. Isaac Hernández Calderón and R. Asomoza, AIP Conference Proceedings, Woodbury, New York, p. 137. (1996).
- [4] J. H. REINA-ESTUPIÑÁN, "Propagador electromagnético en superredes semiconductoras con rompimiento de la simetría de traslación", tesis de maestría, Universidad del Valle, Cali, (1997).

Referencias unidad IV

- [1] G. BECERRA O. y J. C. GRANADA E. "Green-function formalism for the study of the role of 2D magnetoplasmons on magneto infra-red absorption in high electronic density quantum wells" *Revista Colombiana de Física*, vol. 36, no. 1, 2004.
- [2] C. HERMAN, C. WEISBUCH, "Optical detection of conduction-electron spin resonance in GaAs, Ga_{1-x}In_xAs, and Ga_{1-x}Al_xAs". *Phys. Rev. B.*, vol. 15, p. 823, (1977).
- [3] A. M. KOSEVICH. *Mecánica física de los cristales reales*. Ucrania. Dymka, 1981.
- [4] A. J. L. POULTER et al., "Magneto infrared absorption in high electron density GaAs quantum wells". *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, p. 336, (2001).
- [5] A. J. L. POULTER et al., "Magneto infrared absorption in high electron density GaAs quantum wells". *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, 039704, (2002).

- [6] B. ZHANG et al., "Origin of Giant Optical Nonlinearity in Charge-Transfer–Mott Insulators: A New Paradigm for Nonlinear Optics". *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, 039703, (2002).
- [7] J. T. DEVREESE. "Polarons". Condensed Matter, in *Encyclopedia of Applied Physics.*, vol. 14, pp. 383-409, 1996.
- [8] J. T. DEVREESE, "Polarons in ionic crystals and Polar semiconductors". North Holland, Acta Crystallographica Section A. Foundations and advances. Amsterdam, (1972).
- [9] S. DAS SARMA, "Theory of Two-Dimensional Magnetopolarons". *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, p. 859(1984; F. M. Peeters, and J. T. Devreese, "Energy levels of two- and three-dimensional polarons in a magnetic field". *Phys. Rev. B.*, vol. 31, 3689, 1985.
- [10] J. I. POULTER and J. ZEMAN, "Magneto infra-red absorption in high electronic density GaAs quantum wells". *Phys. Rev Lett.*, vol. 86, Berlin, Germany: Paul Drude Institute, (2000).
- [11] G. D. HAI et al., "Polaron-cyclotron-resonance spectrum resulting from interface-and slab-phonon modes in a GaAs/AlAs quantum well". *Phys. Rev. B.*, vol. 47, no. 10, p. 358, (1993).
- [12] S. V. TOVSTONOG et al., "Acoustical and Optical Magnetoplasma Excitations in a Bilayer Electron Electron System". *Phys. Rev. B.*, vol. 66, 241308, (2002).
- [13] G. BECERRA O. y J. C. GRANADA E. "Influence of two-dimensional collective modes on the magneto-infrared absorption in double layer gaas quantum wells with high electronic density". *Revista Colombiana de Física*, vol. 37, No. 1, 2005.
- [14] I. V. KUKUSHKIN et al., "Observation of Retardation Effects in the Spectrum of Two-Dimensional Plasmons". *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, 156801, (2003).
- [15] M. V. CHEREMISIN. "Influence of retardation effects on 2D magnetoplasmon spectrum". *Pis'ma v ZhETP*, vol. 80, p. 302, 2004.
- [16] S. J. CHENG and R. R. GERHARDTS. "Coupled two-layer plasmon modes induced in a single wide quantum well by in-plane magnetic fields." *Phys. Rev. B.*, vol. 65, 085307, (2002).
- [17] S. V. TOVSTONOG et al., *Phys. Rev. B.*, vol. 66, 241308, 2002.

- [18] M. S. Kushwaha, "Plasmons and magnetoplasmons in semiconductor heterostructures". *Surface Science Reports*, vol. 41, no. 1, (2001).

Referencias unidad V

- [1] J. D. JOANNOPOULOS, S. G. JOHNSON, J. N. WINN, and R. D. MEADE. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. Princeton: (Princeton University Press, 2008).
- [2] M. SKOROBOGATIY and J. YANG. *Fundamentals of Photonic Crystal Guiding*. New York: Cambridge University Press, (2009).
- [3] G. BECERRA O. y J. C. GRANADA E., "Características de las excitaciones acopladas en cristales fotónicos cerca de la brecha polaritónica". *Rev. Col. de Fís.*, vol. 38, no. 1, (2006).
- [4] V. KUZMIAK, A. A. MARADUDIN and A. R. MCGURN, "Photonic band structures of two-dimensional systems fabricated from rods of a cubic polar crystal". *Phys. Rev. B.*, vol. 55, 4298, (1997).
- [5] A. Y. SIVACHENKO, M. E. RAIKH and Z. V. VARDENY. "Excitations in photonic crystals infiltrated with polarizable media". *Phys. Rev. A.*, vol. 64, 013809, (2001).
- [6] N. ERADAT, A. Y. SIVACHENKO, M. E. RAIKH and Z. V. VARDENY. "Evidence for braggoriton excitations in opal photonic crystals infiltrated with highly polarizable dyes". *Appl. Phys. Lett.*, vol. 80, 3491, (2002).
- [7] K. C. HUANG, P. BIENSTMAN, J. D. JOANNOPOULOS and K. A. NELSON, "Phonon-polariton excitation in photonic crystal". *Phys. Rev. B.*, vol. 68, 075209, (2003).
- [8] G. BECERRA O. y J. C. GRANADA E., "Photonic States in Superconductor-Dielectric Semi-Infinite Structures". *Rev. Col. de Fís.*, vol. 39, no. 1, (2007).
- [9] E. ISTRATE and E. H. SARGENT. "Photonic crystal heterostructures and interfaces". *Rev. Mod. Phys.*, vol. 78, no. 455, (2006).
- [10] S. G. JOHNSON, P. R. VILLENEUVE, S. FAN and J. D. Joannopoulos. "Linear waveguides in photonic-crystal slabs". *Phys. Rev. B.*, vol. 62, 8212, (2000).

- [11] J. N. WINN, S. FAN, C. CHEN, J. MICHEL, J. D. JOANNOPOULOS and E. L. THOMAS. "Guided-mode Resonance in Planar Photonic Crystals: Application to Sensing". *Science*, vol. 282, 1679(1998).
- [12] S. FAN, P. R. VILLENEUVE, J. D. JOANNOPOULOS, M. J. KHAN, C. MANOLATOU and H. A. HAUS, "Theoretical analysis of channel drop tunneling processes". *Phys. Rev. B.*, vol. 59, no. 15, 882, 1999.
- [13] H. TAKEDA, K. YOSHINO, and A. A. ZAKHIDOV. "Properties of Abrikosov lattices as photonic crystals". *Phys. Rev. B.*, vol. 70, 085109, (2004).
- [14] C. J. WU, M. S. CHEN and T. J. YANG. "Transmittance spectra in one-dimensional superconductor-dielectric photonic crystal". *Physica C.*, vol. 432, no. 133, (2005).
- [15] G. BECERRA O. y J.C. GRANADA E., "Photonic states in superconductor-dielectric semi-infinite structures". *Rev. Col. de Fís.*, vol. 41, no. 2, (2009).
- [16] P. KRAMPER, M. AGIO, C. M. SOUKOULIS, A. BIRNER, F. MÜLER, R. B. WHERSPOHN, U. GÖSELE and V. SANDOGHDAR. "Highly directional emission from photonic crystal waveguides of subwavelength width". *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, 113903, (2004).
- [17] E. MORENO, F. J. GARCÍA VIDAL and L. MARTÍN MORENO. "Enhanced transmission and beaming of light via photonic crystal surface modes". *Phys. Rev.*, vol. 69, 121402 (R), 2004.

Con el objetivo de ilustrar al lector en el método de las funciones de Green en la descripción de la propagación de las ondas electromagnéticas y las propiedades ópticas de los nuevos materiales artificiales, este texto desarrolla problemas puntuales de la física de la materia condensada. Para ello busca afinar la metodología, modernizar el discurso, enriquecer el contenido y familiarizar al estudiante de posgrado en ciencias físicas en la aplicación de esta técnica teórica para el cálculo de las componentes del tensor de Green y su respectivo análisis físico. Se sabe que los polos de las funciones de Green determinan las relaciones de dispersión, y la parte imaginaria el poder espectral de las oscilaciones colectivas del sistema.

El libro abarca básicamente cinco temáticas analizadas en sus respectivas unidades, a saber: una descripción del concepto de propagador y la definición de la función de Green junto con algunas propiedades; la construcción de las componentes del tensor de Green al describir la interacción de la radiación incidente con la superficie de un cristal dieléctrico semiinfinito; una descripción del papel del magneto-plasmón bidimensional en una absorción infrarroja con campo magnético transversal y altas densidades electrónicas en los pozos cuánticos; cálculo de las componentes del propagador fotónico en un pozo cuántico con alta densidad electrónica en un campo magnético transversal, y finalmente, se estudian diferentes configuraciones físicas de cristales fotónicos unidimensionales con materiales iónicos y superconductores.

El enfoque aquí desglosado sobre las aplicaciones del propagador de Green ofrece varias ventajas en relación con la formación de nuevos investigadores, quienes al recoger estas experiencias de seguro avanzarán hacia nuevos campos del conocimiento.



UNIVERSIDAD DE
SAN BUENAVENTURA
CALI

Av. 10 de Mayo, La Umbría,
carretera a Pance
PBX: 4882222
www.usbcali.edu.co


EDITORIAL
BONAVENTURIANA
CALI



[editorialbonaventuriana](https://www.facebook.com/editorialbonaventuriana)



[@EditBonaventuri](https://twitter.com/EditBonaventuri)



[EditorialBonaventuriana](https://www.youtube.com/channel/UC...)



[editorial-bonaventuriana](https://www.linkedin.com/company/editorial-bonaventuriana)

www.editorialbonaventuriana.usb.edu.co

—VIGILADA MINEDUCACIÓN—